

Funciones reales y gráficas en el plano

A cada tipo de función le corresponde una forma característica. En esta sección estudiaremos distintos tipos de funciones a través de sus gráficas, enfocándonos en cómo la regla que define a la función se refleja en su gráfica.

Estudiaremos funciones reales: $(X \subseteq \mathbb{R})$ y $(Y \subseteq \mathbb{R})$. La función se denota $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

La notación $f(x)$ se lee como "f de x". Si $f(x)=x^2$ entonces $f(3)=9$, x es la variable independiente y $y=f(x)$ es la variable dependiente.

GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

La gráfica de una función f es el conjunto de todos los puntos $(x, f(x))$ en el plano cartesiano $\mathbb{R}^2$.

Criterio de la vertical: una gráfica corresponde a una función si y solo si cada línea vertical intersecta la gráfica a lo más una vez.

Ejemplos:

1. Funciones lineales: tiene la forma $f(x)=mx + b$. Son las más simples, pero no las menos importantes. Describen crecimiento constante y aparecen en modelos económicos, físicos y sociales.

Abre el applet de geogebra y realiza las siguientes actividades:

- Elige dos valores distintos de m que generen rectas que se crucen en el mismo punto. ¿qué observas sobre ese punto?, ¿de qué depende?
- Encuentra valores de m y b tales que la recta:
 - pase por el origen
 - sea horizontal
 - sea decreciente
 - pase por el punto $(2,3)$

<https://www.geogebra.org/classic/pugqzfnr?embed>

2. Funciones cuadráticas: tiene la forma $f(x)=ax^2 + bx+c$. Muchas trayectorias en la vida real tienen forma parabólica: el recorrido de un objeto lanzado, el movimiento de una pelota. Usa la gráfica que aparece a continuación y realiza las siguientes actividades:

- Mantén b y c fijos. Cambia lo a
 - ¿Qué permanece igual en todas las parábolas?
 - ¿La parábola se hace más abierta, más cerrada, se voltea?
 - ¿El vértice cambia de lugar?
- Fija a y b , cambia c .
 - ¿Cómo se mueven las parábolas en el plano?
 - ¿La gráfica se desliza, gira, se estira o se voltea?
 - ¿Qué cambia de la gráfica y qué permanece igual?

<https://www.geogebra.org/classic/w6a43rrt?embed>

Las funciones lineales y cuadráticas que hemos estudiado hasta ahora pertenecen a una misma familia: las **funciones polinomiales**. Estas funciones están definidas para todo número real y sus gráficas no presentan cortes ni saltos.

3. Funciones racionales: forma general: $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$, son el cociente de dos polinomios. En algunas funciones, no todos los valores de una variable están permitidos. Las funciones racionales son un ejemplo importante: su gráfica puede presentar rupturas y asíntotas debido a restricciones en el dominio. Sus gráficas son muy útiles para analizar estos comportamientos.

Primer applet: $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$

<https://www.geogebra.org/classic/vxcmjkvs?embed>

- Encuentra un valor de x donde la gráfica "se rompa", ¿qué ocurre con el denominador en ese punto?.
- Ajusta los parámetros para que:
 - La gráfica tenga una asíntota vertical en $x=1$
 - No tenga ninguna asíntota vertical, ¿qué condición cumple el denominador en este caso?
- Observa la gráfica cerca de una asíntota vertical
 - ¿qué le pasa a $f(x)$ cuando x se acerca a ese valor por la izquierda y por la derecha?
- Completa la frase: "El parámetro ____ controla principalmente ____, mientras que el parámetro ____ controla ____"

Segundo applet: $f(x)=\frac{ax+b}{(x-r)(x-s)}$

<https://www.geogebra.org/classic/srtf7xz9?embed>

- Ajusta los parámetros para que:
 - la gráfica tenga dos asíntotas verticales
 - tenga solo una.
- Observa que pasa si $(r=s)$, ¿cómo cambia la gráfica?
- Observa el comportamiento de la gráfica cerca de cada asíntota, ¿es igual en las dos?

4. Raíces cuadradas: Son de la forma $(f(x)=a\sqrt{x-h})$. No todas las funciones empiezan en cualquier punto: las funciones raíz cuadrada tienen un punto inicial que determina su dominio. Estas funciones aparecen de forma natural al describir distancias y longitudes que no pueden ser negativas. Describen fenómenos que sólo existen a partir de cierto instante.

Con el applet de geogebra, realiza las siguientes actividades:

- Mueve (h) hasta que la gráfica "empiece" exactamente en $(x=2)$
 - ¿qué valor toma (h)
 - ¿qué representa ese punto inicial de la gráfica?
- Ajusta (a) para que la gráfica:
 - sea más "empinada"
 - sea más "aplanada"
 - se refleje hacia abajo, ¿cómo son los valores de (a) en este caso.
- Fija (h) y cambia solo (a) , ¿el dominio cambia?, ¿y el rango?
- Fija (a) y cambia solo (h) , ¿qué le pasa al dominio?, ¿qué le pasa al punto donde inicia la gráfica?

<https://www.geogebra.org/classic/uwh3y32e?embed>

5. Funciones definidas por partes:

5.1. Función piso. La función piso $(f(x)=\lfloor x \rfloor)$ devuelve el entero más cercano por debajo de (x) . Es una función que está definida para todo (x) pero no cambia de manera continua. Un ejemplo de esta función es la edad: cuando alguien pregunta cuántos años tienes, normalmente respondemos un número entero. Aunque hayas cumplido 20 años y 3 meses, la respuesta es que tienes 20 años.

Actividad:

- Describe con tus palabras qué hace esta función, ¿se parece a un redondeo?, ¿hacia dónde?
- Si $x=2.7$, ¿cuánto vale $f(x)$?
- Observa la gráfica en los enteros, ¿qué ocurre en $x=1,2,3,4,\dots$?
- ¿por qué hay círculos cerrados y puntos llenos?
- ¿el dominio tiene restricciones?, ¿el rango qué tipo de números contiene?

<https://www.geogebra.org/classic/xua5mgzv?embed>

5.2. Ejemplo general de función definida por partes: La regla que define a la función cambia dependiendo del valor de x .

Actividad:

- ¿Cuál es el dominio de la función?, ¿y el rango?
- ¿En qué intervalos la función es constante, creciente, decreciente?
- Mueve el deslizador y completa la tabla:

x_0	Regla que se usa	$f(x_0)$
-1.5		
0		
1.5		
6		

- ¿La gráfica se puede dibujar sin levantar el lápiz?
- En una función definida por partes, ¿qué es más importante: la fórmula o los intervalos donde se aplica?, explica tu respuesta.

<https://www.geogebra.org/classic/ag8kqaqt?embed>

DOMINIO DE UNA FUNCIÓN

En los ejemplos anteriores vimos que no todas las funciones están definidas para todos los valores de x . A este conjunto de valores permitidos se le llama **dominio** de la función.

Algunas funciones restringen su dominio de forma implícita, entre las restricciones comunes están:

- División por cero: el denominador **nunca** puede ser 0 .
- Raíces cuadradas (en funciones reales): el argumento no puede ser negativo.

Ejemplos:

1. $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ no está definida en $(x=1)$, el dominio es: $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Aunque la expresión se puede simplificar, la función original no está definida en ese punto.
2. $f(x) = a\sqrt{x-h}$ no está definida para $(x < h)$, el dominio es: $[h, \infty)$

Actividad de cierre: Para cada una de las funciones estudiadas en esta página:

- ¿Está definida para todo (x) ?
- Si no, ¿qué restricción aparece y por qué?
- ¿Cómo se refleja esa restricción en la gráfica?

Revision #29

Created 2026-01-20 18:46:05 UTC by Martina Roquero

Updated 2026-02-11 18:26:42 UTC by Martina Roquero