Cálculo Univariado

FUNCIONES Y GRÁFICAS

En este capítulo estudiaremos el concepto de función como una herramienta para describir relaciones entre variables. Analizaremos sus distintas formas de representación (algebraica, gráfica y tabular) y aprenderemos a interpretar geométricamente cómo cambian las gráficas al modificar sus parámetros.

FUNCIONES Y GRÁFICAS

Funciones: idea y representaciones

Antes de que aparezcan fórmulas y gráficas, piensa en esto:

Cada vez que revisas el clima, cada vez que ves el precio del dólar, cada vez que Spotify te recomienda una canción o cuando ves cómo cambian las calorías que quemas al correr más rápido, estás usando funciones.

Una función no es primero una fórmula, es una manera de decir: "a cada país le corresponde una población", "a cada palabra le corresponde una longitud", "a cada año le corresponde un precio promedio de audífonos". Las funciones son la forma matemática de capturar estas relaciones.

DEFINICIÓN

Una función f es una regla que asigna a cada elemento de un conjunto X **exactamente** un elemento de un conjunto Y.

Esta función se denota como $f: X \to Y$

El conjunto X se llama dominio y el conjunto Y se llama codominio.

La imagen de un elemento $x \in X$ es el valor $y=f(x) \in Y$ en el codominio.

Al conjunto de todos los valores posibles de la función se le llama *rango* o *imagen* de f.

Notación: $f(X)=\{f(x)| x \in X\} \subseteq Y$

REPRESENTACIONES DE FUNCIONES

Existen varias formas de definir funciones. A continuación se muestran algunas y se proponen preguntas de reflexión.

Tabla de valores:

Una función puede definirse mediante una tabla. En este ejemplo vamos a representar una función f que asigna a un país su población:

x	$f(x)$
México	133 millones
Estados Unidos	349 millones
Canadá	41 millones
Brasil	213 millones
Argentina	47 millones
Chile	20 millones
Perú	34 millones
...	...

Preguntas:

Sobre las entradas y salidas:

- ¿Qué tipo de objetos son las entradas de esta función: números, palabras, países, categorías…?
- ¿Cuáles son las "salidas de esta función?
- ¿Tiene sentido que la salida sea cualquier número real, como 3.7 o -12?

Sobre dominio, codominio y definición:

- ¿Todos los países del mundo podrían aparecer como entrada de esta función? ¿Por qué sí o por qué no?
- ¿Qué pasaría si alguien intenta evaluar la función en “España” si no está en la tabla? ¿La función deja de existir o simplemente no está definida ahí?
- ¿El dominio es finito o infinito? ¿Cómo lo sabes?
- ¿Podría el codominio ser "todos los números reales"?

Sobre propiedades de las funciones:

- ¿Crees que dos países distintos podrían tener exactamente la misma población?,
- si esto pasa, ¿seguiría siendo una función?
- ¿Qué ventajas tiene pensar esta tabla como una función y no solo como una lista de datos?

Algoritmo:

Una función puede definirse mediante un algoritmo. Ejemplo: una función f que asigna a una cadena su longitud:

- $f(sal) = 3$
- $f(mar) = 3$
- $f(límite) = 6$

- $f(paralelogramo) = 13$
- $f(cálculo) = 7$

Preguntas:

Sobre el dominio:

- ¿Qué tipo de objetos son ahora las entradas de la función?
- ¿Qué tienen en común todos los elementos del dominio?
- ¿Podría esta función aplicarse a cualquier palabra del español?
- ¿Y a palabras en otros idiomas?
- ¿Y a símbolos como “$$$” o “123”?

Sobre las salidas:

- ¿Qué tipo de objeto es la salida de la función?
- ¿Puede la función tomar el valor 0?
- ¿Para qué entrada?

Sobre qué significa ser función:

- ¿Crees que dos palabras distintas pueden tener la misma imagen?
  Pon ejemplos.
- ¿Podría una misma palabra tener dos valores distintos?
  ¿Qué pasaría si eso ocurriera?
- ¿En qué sentido sigue siendo una función, aunque no haya fórmulas?

Gráfica:

Una función puede definirse mediante su gráfica. Ejemplo: el precio de un par de audífonos en el tiempo

https://www.geogebra.org/classic/dh5zxnxx?embed

Preguntas:

Interpretación básica:

- ¿Qué representa el eje horizontal en esta gráfica?
- ¿Qué significa un punto como (2015, 2300)?

Sobre el dominio y el tipo de función:

- ¿Por qué no tiene sentido evaluar la función en 2015.3?
- ¿Esta función es continua o discreta? ¿Por qué?

Sobre el modelo y la realidad:

- ¿Tiene sentido que el precio sea negativo?
- ¿Tiene sentido que sea 12 pesos?
- ¿Qué rango de valores es razonable para este fenómeno?
- ¿Esta gráfica describe una ley matemática exacta o una aproximación de la realidad?

También podemos crear una función a partir del esbozo de su gráfica.

https://www.geogebra.org/classic/a2xkvsg8?embed

Preguntas:

Lectura de gráfica:

- ¿En qué intervalos la función crece?
- ¿En qué intervalos decrece?
- ¿Dónde parece haber un máximo local?
- ¿Hay algún tramo donde la función sea casi constante?

Interpretación:

- ¿Qué fenómeno real podría tener esta forma?
- ¿Qué historia cuenta esta gráfica?
- ¿Qué podría representar el eje horizontal?
- ¿Qué podría representar el eje vertical?

Construcción de función:

- ¿Crees que existe una fórmula “bonita” que la genere exactamente?
- Si no, ¿qué tipo de funciones usarías para aproximarla?
- ¿Una función por partes tendría sentido aquí?

Funciones explícitas:

Una función explícita se define mediante una expresión algebraica. Por ejemplo $f(x)=x^2$ asigna a un número su cuadrado. En cálculo, trabajaremos principalmente con funciones explícitas.

FUNCIONES Y GRÁFICAS

Funciones reales y gráficas en el plano

A cada tipo de función le corresponde una forma característica. En esta sección estudiaremos distintos tipos de funciones a través de sus gráficas, enfocándonos en cómo la regla que define a la función se refleja en su gráfica.

Estudiaremos funciones reales: $X \subseteq \mathbb{R}$ y $Y \subseteq \mathbb{R}$. La función se denota $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

La notación $f(x)$ se lee como "f de x". Si $f(x)=x^2$ entonces $f(3)=9$, x es la variable independiente y $y=f(x)$ es la variable dependiente.

GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

La gráfica de una función f es el conjunto de todos los puntos $(x, f(x))$ en el plano cartesiano $\mathbb{R}^2$.

Criterio de la vertical: una gráfica corresponde a una función si y solo si cada línea vertical intersecta la gráfica a lo más una vez.

Ejemplos:

1. Funciones lineales: tiene la forma $f(x)=mx + b$. Son las más simples, pero no las menos importantes. Describen crecimiento constante y aparecen en modelos económicos, físicos y sociales.

Abre el applet de geogebra y realiza las siguientes actividades:

- Elige dos valores distintos de m que generen rectas que se crucen en el mismo punto. ¿qué observas sobre ese punto?, ¿de qué depende?
- Encuentra valores de m y b tales que la recta:
  - pase por el origen
  - sea horizontal
  - sea decreciente
  - pase por el punto $(2,3)$

https://www.geogebra.org/classic/pugqzfnr?embed

2. Funciones cuadráticas: tiene la forma $f(x)=ax^2 + bx+c$. Muchas trayectorias en la vida real tienen forma parabólica: el recorrido de un objeto lanzado, el movimiento de una pelota. Usa la gráfica que aparece a continuación y realiza las siguientes actividades:

- Mantén b y c fijos. Cambia lo a
  - ¿Qué permanece igual en todas las parábolas?
  - ¿La parábola se hace más abierta, más cerrada, se voltea?
  - ¿El vértice cambia de lugar?
- Fija a y b, cambia c.
  - ¿Cómo se mueven las parábolas en el plano?
  - ¿La gráfica se desliza, gira, se estira o se voltea?
  - ¿Qué cambia de la gráfica y qué permanece igual?

https://www.geogebra.org/classic/w6a43rrt?embed

Las funciones lineales y cuadráticas que hemos estudiado hasta ahora pertenecen a una misma familia: las **funciones polinomiales.** Estas funciones están definidas para todo número real y sus gráficas no presentan cortes ni saltos.

3. Funciones racionales: forma general: $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$, son el cociente de dos polinomios. En algunas funciones, no todos los valores de una variable están permitidos. Las funciones racionales son un ejemplo importante: su gráfica puede presentar rupturas y asíntotas debido a restricciones en el dominio. Sus gráficas son muy útiles para analizar estos comportamientos.

Primer applet: $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$

https://www.geogebra.org/classic/vxcmjkvs?embed

- Encuentra un valor de x donde la gráfica "se rompa", ¿qué ocurre con el denominador en ese punto?.
- Ajusta los parámetros para que:
  - La gráfica tenga una asíntota vertical en $x=1$
  - No tenga ninguna asíntota vertical, ¿qué condición cumple el denominador en este caso?
- Observa la gráfica cerca de una asíntota vertical
  - ¿qué le pasa a $f(x)$ cuando x se acerca a ese valor por la izquierda y por la derecha?
- Completa la frase: "El parámetro ____ controla principalmente ____, mientras que el parámetro ____ controla ____"

Segundo applet: $f(x)=\frac{ax+b}{(x-r)(x-s)}$

https://www.geogebra.org/classic/srtf7xz9?embed

- Ajusta los parámetros para que:
  - la gráfica tenga dos asíntotas verticales
  - tenga solo una.
- Observa que pasa si $r=s$, ¿cómo cambia la gráfica?
- Observa el comportamiento de la gráfica cerca de cada asíntota, ¿es igual en las dos?

4. Raíces cuadradas: Son de la forma $f(x)=a\sqrt{x-h}$. No todas las funciones empiezan en cualquier punto: las funciones raíz cuadrada tienen un punto inicial que determina su dominio. Estas funciones aparecen de forma natural al describir distancias y longitudes que no pueden ser negativas. Describen fenómenos que sólo existen a partir de cierto instante.

Con el applet de geogebra, realiza las siguientes actividades:

- Mueve h hasta que la gráfica "empiece" exactamente en $x=2$
  - ¿qué valor toma h
  - ¿qué representa ese punto inicial de la gráfica?
- Ajusta a para que la gráfica:
  - sea más "empinada"
  - sea más "aplanada"
  - se refleje hacia abajo, ¿cómo son los valores de a en este caso.
- Fija h y cambia solo a, ¿el dominio cambia?, ¿y el rango?
- Fija a y cambia solo h, ¿qué le pasa al dominio?, ¿qué le pasa al punto donde inicia la gráfica?

https://www.geogebra.org/classic/uwh3y32e?embed

5. Funciones definidas por partes:

5.1. Función piso. La función piso $f(x)=\lfloor x \rfloor$ devuelve el entero más cercano por debajo de x. Es una función que está definida para todo x pero no cambia de manera continua. Un ejemplo de esta función es la edad: cuando alguien pregunta cuántos años tienes, normalmente respondemos un número entero. Aunque hayas cumplido 20 años y 3 meses, la respuesta es que tienes 20 años.

Actividad:

- Describe con tus palabras qué hace esta función, ¿se parece a un redondeo?, ¿hacia dónde?
- Si $x=2.7$, ¿cuánto vale $f(x)$?
- Observa la gráfica en los enteros, ¿qué ocurre en $x=1,2,3,4,...$
- ¿por qué hay círculos cerrados y puntos llenos?
- ¿el dominio tiene restricciones?, ¿el rango qué tipo de números contiene?

https://www.geogebra.org/classic/xua5mgzv?embed

5.2. Ejemplo general de función definida por partes: La regla que define a la función cambia dependiendo del valor de x.

Actividad:

- ¿Cuál es el dominio de la función?, ¿y el rango?
- ¿En qué intervalos la función es constante, creciente, decreciente?
- Mueve el deslizador y completa la tabla:

x_0	Regla que se usa	$f(x_0)$
-1.5		
0		
1.5		
6		

- ¿La gráfica se puede dibujar sin levantar el lápiz?
- En una función definida por partes, ¿qué es más importante: la fórmula o los intervalos donde se aplica?, explica tu respuesta.

https://www.geogebra.org/classic/ag8kqaqt?embed

DOMINIO DE UNA FUNCIÓN

En los ejemplos anteriores vimos que no todas las funciones están definidas para todos los valores de x. A este conjunto de valores permitidos se le llama **dominio** de la función.

Algunas funciones restringen su dominio de forma implícita, entre las restricciones comunes están:

- División por cero: el denominador **nunca** puede ser 0.

- Raíces cuadradas (en funciones reales): el argumento no puede ser negativo.

Ejemplos:

1. $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ no está definida en $x=1$, el dominio es: $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Aunque la expresión se puede simplificar, la función original no está definida en ese punto.
2. $f(x)=a\sqrt{x-h}$ no está definida para $x<h$, el dominio es: $[h,\infty)$

Actividad de cierre: Para cada una de las funciones estudiadas en esta página:

- ¿Está definida para todo$x$?
- Si no, ¿qué restricción aparece y por qué?
- ¿Cómo se refleja esa restricción en la gráfica?

FUNCIONES Y GRÁFICAS

Transformaciones

Muchas funciones se parecen entre sí: cambian de lugar horizontal o verticalmente, se estiran, se voltean, pero conservan su forma básica.

En esta sección exploraremos cómo una gráfica conocida puede transformarse en muchas otras. Partiremos de una función base y analizaremos qué ocurre al modificar distintos parámetros.

Sea $g(x)=b*f(a(x-h))+k$, los parámetros a, b, h y k modifican la gráfica de f de distintas maneras. Trabajaremos con este applet en cuatro etapas, enfocándonos en un parámetro distinto en cada una.

https://www.geogebra.org/classic/dvphzfn5?embed

Etapa 1: efecto de los parámetros h y k:

Fija $a=1$ y $b=1$

- Mueve el parámetro h, ¿la gráfica se mueve a la izquierda o a la derecha?
- Mueve el parámetro k, ¿qué ocurre verticalmente?, ¿la forma de la gráfica cambia?

Al movimiento que ocurre cuando movemos h se le llama una **translación horizontal**, y al movimiento que ocurre cuando movemos k, una **translación vertical.**

Etapa 2: efecto en el parámetro b:

Fija $h=0$ y $k=0$

- Cambia b, con $b>0$, ¿la gráfica se vuelve más empinada (más empinada=mayor pendiente) o más plana?
- Cambia b, con $b<0$, ¿qué ocurre con la gráfica?

Este tipo de cambio se llama **estiramiento vertical** y cuando $b<0$, como **reflexión vertical.**

Etapa 3: efecto en el parámetro a:

Fija $b=1$, $h=0$ y $k=0$

- Cambia a, ¿la gráfica se "compacta" o se "estira" horizontalmente?
- Compara con lo que ocurre cuando cambias b.
- ¿Por qué cambiar a afecta la gráfica de manera distinta a cambiar b?

Aunque la función original no cambió, su gráfica puede moverse, estirarse o reflejarse al modificar los parámetros. Las transformaciones permiten generar muchas gráficas a partir de una sola función base.

Actividad: Hasta ahora hemos trabajado con una función específica para entender el efecto de cada parámetro. Ahora explora qué ocurre cuando cambias la función base $f(x)$.

Sugerencia de funciones para probar:

- $f(x)=2\sqrt{1-x}$
- $f(x)=\frac{1}{x+3}$
- $f(x)=-x^2+1$
- $f(x)=-4x-3$

Con esas funciones observa:

- ¿qué transformación (o transformaciones) cambian el dominio de la función?
- ¿y el rango?

FUNCIONES Y GRÁFICAS

Otras funciones importantes

En esta sección exploraremos algunas funciones que aparecen con mucha frecuencia en matemáticas y en aplicaciones y cuyas gráficas presentan comportamientos distintos a los que hemos visto hasta ahora.

1. FUNCIÓN VALOR ABSOLUTO

La función valor absoluto aparece cuando solo importa el tamaño del error, la magnitud de una diferencia o qué tan lejos estás de un valor de referencia, sin importar el signo. Por ejemplo, podemos decir "me equivoqué por 2" y es equivalente a equivocarse por -2 o $+2$.

Gráficamente, esto se refleja en que todos los valores negativos se "voltean" hacia arriba.

https://www.geogebra.org/classic/yqw6s4pb?embed

Actividad:

- Mueve el deslizador x_0,
  - ¿qué ocurre con $f(x_0)$ cuando x_0 es negativo?
  - ¿qué ocurre cuando es positivo?
  - ¿Existen dos valores distintos de x que tengan el mismo valor absoluto?, ¿cuáles?
- Compara las gráficas de $y=x$ y $y=|x|$
  - ¿en qué intervalo coinciden?
  - ¿qué parte de la gráfica de $y=x$ ya no aparece en $y=|x|$?
- Supón que el valor correcto de una medición es 2, el error cometido es x y el tamaño del error se mide con $|x|$.
  - Si $x=-2.05$, ¿cuál es el tamaño del error?
  - ¿es mayor el error cuando $x=2.05$ o cuando $x=-2.05$?
  - ¿qué valores de x cumplen que el error sea menor que 1?
- Observa la gráfica:
  - ¿en qué punto cambia la "dirección" de la gráfica?
  - ¿por qué ese punto es epecial?, ¿hay valores de y por debajo de ese punto?

2. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Hay fenómenos que no evolucionan de manera lineal, sino que suben y bajan y se repiten una y otra vez: el día y la noche, las estaciones del año, el ritmo del corazón, las mareas, las ondas de sonido, los ciclos económicos.

Las funciones trigonométricas aparecen cuando queremos describir comportamientos periódicos, es decir, patrones que se repiten regularmente con el tiempo.

https://www.geogebra.org/classic/xbrx64v7?embed

Actividad:

- Mueve el deslizador de θ
  - ¿cómo cambian los valores de $\sin(\theta)$ y $\cos(\theta)$ cuando aumenta θ?
  - ¿los valores de $\sin(\theta)$ y $\cos(\theta)$ crecen siempre, decrecen siempre o hacen ambas cosas?
- Observa las gráficas de $\sin(\theta)$ y $\cos(\theta)$
  - ¿qué patrón se repite una y otra vez?
  - ¿cada cuánto se repite ese patrón?
  - ¿los valores de $\sin(\theta)$ y $\cos(\theta)$ superan algún valor máximo o mínimo?, ¿cuáles son esos valores?
  - Las gráficas ¿tienen la misma forma?
  - ¿tienen alguna transformación como las que analizamos en la página anterior?
  - ¿qué ocurre en valores de θ como 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$
- Activa la opción de **tangente**:
  - ¿qué ocurre con $\tan(\theta)$ cuando θ se acerca a $\frac{\pi}{2}$ o a $\frac{3\pi}{2}$?
  - ¿tiene alguna restricción en su dominio?

3. FUNCIONES INVERSAS

Dada una función f, puede surgir la pregunta inversa: si conocemos el valor de $f(x)$, ¿podemos recuperar el valor de x?

No todas las funciones permiten hacerlo, cuando es posible, la función inversa describe exactamente ese proceso de recuperación.

La gráfica de una función inversa se obtiene intercambiando los roles de entrada y salida. Gráficamente, esto se refleja como una simetría respecto a la recta $y=x$.

Actividad:

https://www.geogebra.org/classic/tu2srjkz?embed

- Observa las gráficas de $f(x)$ y $f^{-1}(x)$
    - ¿qué relación tienen con la recta $y=x$?
- Elige un punto (a,b) en la gráfica de $f(x)$, usando el deslizador
    - ¿qué punto aparece en la gráfica de $f^{-1}(x)$?
    - ¿qué ocurrió con las coordenadas?
    - ¿cómo se mueven los puntos P y Q?, ¿qué relación geométrica mantienen entre sí?
- Observa el dominio y el rango, ¿cómo se relacionan el dominio y el rango de $f(x)$ con los de $f^{-1}(x)$?
- ¿Existe algún punto que pertenezca tanto a la gráfica de $f(x)$ como a la de $f^{-1}(x)$?, ¿qué condición debe cumplir?

LÍMITES

En este capítulo estudiaremos el concepto de límite como una herramienta para entender qué ocurre cuando una variable se aproxima a un valor. Exploraremos la idea de aproximación, los límites laterales, la continuidad y el comportamiento de las funciones cerca de puntos especiales y en el infinito.

Motivación: paradoja de Zenón

Desde la antigüedad, filósofos y matemáticos se han preguntado qué significa acercarse a un valor sin necesariamente alcanzarlo.
Las paradojas de Zenón muestran que un proceso puede dividirse infinitamente y aun así describir un resultado finito.

Imagina que quieres llegar a un punto, pero antes debes recorrer la mitad del camino.
Después, la mitad de lo que falta. Luego otra mitad… y así sucesivamente.

Parece que siempre queda algo por recorrer.
Sin embargo, en la práctica sí llegamos.

Esta pregunta: *¿cómo puede un proceso infinito describir un resultado finito?* es una de las ideas que da origen al concepto de límite.

Actividad:

Explora el siguiente applet que ilustra la paradoja de Zenón:

https://www.geogebra.org/material/iframe/id/afd2jt7a/width/900/height/500/border/888888/sfsb/true/smb/false/stb/false/stbh/false/ai/false/asb/false/sri/true/rc/false/ld/false/sdz/true/ctl/false

- ¿Crees que el punto llega realmente al destino?
- Si el punto recorre cada vez la mitad de la distancia restante, ¿qué ocurre con la distancia que falta por recorrer?
- Si hay infinitos pasos, ¿significa que el proceso no puede terminar?
- Observa la “distancia recorrida”.
  - ¿Se vuelve exactamente 1 en algún momento?
  - ¿Se hace cada vez más cercana a 1?
- ¿Necesitamos completar todos los pasos para describir el resultado?
- ¿Qué significa “acercarse” en matemáticas?

El concepto de límite surge precisamente para describir este tipo de situaciones: cuando algo se aproxima cada vez más a un valor, aunque la aproximación pueda imaginarse como infinita.

Para seguir explorando

La paradoja de Zenón ha sido discutida durante más de dos mil años.
Si te interesa ver cómo estas ideas se conectan con el desarrollo del cálculo moderno, puedes explorar el siguiente video:

No necesitas dominar todos los conceptos que aparecen ahí.
Lo importante es notar cómo una idea filosófica llevó al desarrollo de nuevas herramientas matemáticas:

https://www.youtube.com/embed/8czCAZGqLes

LÍMITES

Acercarse a un valor: noción de límite

En la paradoja de Zenón vimos que un proceso puede acercarse cada vez más a un resultado sin necesidad de “completar” todos los pasos.

En matemáticas, esta idea aparece cuando estudiamos funciones.

Muchas veces no nos interesa únicamente el valor de una función en un punto, sino **qué ocurre cuando la variable se aproxima a ese punto**.

Por ejemplo, podemos preguntarnos:

- ¿Qué valores toma la función cuando x está cerca de 1?
- ¿La gráfica se acerca a un valor específico?
- ¿Importa desde qué lado nos acercamos?

Para describir esta idea utilizamos el concepto de límite.

Decimos que

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

representa el valor al que se aproxima la función $f(x)$ cuando x se acerca a a, aunque la función no necesariamente tome ese valor.

Actividad:

En la gráfica podemos observar qué ocurre cuando x se acerca al punto indicado sin tomar exactamente ese valor.

Explora el applet y analiza la aproximación desde distintos lados.

https://www.geogebra.org/classic/smkevst5?embed

- ¿Qué valores toma la función cuando x está cerca de 1?
- ¿Parece que la función se acerca a un valor específico?

- ¿Importa si la aproximación se hace por la izquierda o por la derecha?
- ¿Necesitamos evaluar la función exactamente en el punto para describir lo que ocurre cerca?
- ¿El valor al que se aproxima la función coincide necesariamente con $f(1)$?

El concepto de límite permite describir matemáticamente esta idea de aproximación: estudiar qué ocurre cerca de un punto, incluso cuando la función no está definida en él.

LÍMITES

Límites Laterales

En ocasiones no basta con decir que una variable se acerca a un valor. También importa **desde qué lado** se aproxima.

Podemos acercarnos a un número a de dos maneras:

- por valores menores que a es decir, **por la izquierda**;
- por valores mayores que a, es decir, **por la derecha**.

Esta distinción da lugar a los **límites laterales**.

Decimos que

$$ \lim_{x\to a^-} f(x) $$

representa el valor al que se aproxima la función cuando x se acerca a a **por la izquierda**.

De manera similar,

$$ \lim_{x\to a^+} f(x) $$

representa el valor al que se aproxima la función cuando x se acerca a a **por la derecha**.

Un **límite existe** cuando los valores a los que se aproxima la función desde la izquierda y desde la derecha coinciden.

El $\lim_{x\to a} f(x)$ existe si $\lim_{x\to a^+} f(x)$=$\lim_{x\to a^-} f(x)$

Actividad

Observa el siguiente ejemplo:

$$ f(x)=\frac{2x^2-7x+3}{|x-3|} $$

Explora el applet y analiza qué ocurre cuando x se aproxima a 3 por ambos lados.

https://www.geogebra.org/classic/mc6s2hv4?embed

Preguntas para pensar

- ¿Qué valores toma la función cuando x se acerca a 3 por la izquierda?
- ¿Qué valores toma cuando x se acerca a 3 por la derecha?
- ¿Parece que la función se aproxima al mismo valor en ambos casos?
- Si los valores a los que se acerca son distintos, ¿podemos decir que existe un único límite?
- ¿Puede existir un límite lateral aunque el límite completo no exista?

En este ejemplo, la aproximación por la izquierda y por la derecha no conduce al mismo valor. Decimos entonces que los límites laterales son distintos:

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = -5 \qquad \lim_{x\to 3^+} f(x) = 5$$

Como estos valores no coinciden, el límite de la función cuando $x\to3$ **no existe**.

Idea importante

Para que exista el límite de una función en un punto, es necesario que la función se aproxime **al mismo valor** desde ambos lados.

$$\lim_{x\to a} f(x) \text{ existe} \quad \text{si y solo si} \quad \lim_{x\to a^-} f(x)=\lim_{x\to a^+} f(x)$$

LÍMITES

Límites al infinito

Hasta ahora hemos estudiado lo que ocurre cuando *x* se acerca a un número específico. Pero también podemos preguntarnos: ¿qué pasa cuando *x* crece cada vez más? ¿Cómo se comporta una función cuando la variable se vuelve muy grande?

Esto se describe mediante los **límites al infinito**.

$$\lim_{x \to \infty} f(x)$$

Esta expresión no significa que *x* "llegue" al infinito, sino que *x* crece sin límite. Lo que nos interesa es observar qué ocurre con los valores de la función.

Actividad 1:

Consideremos la función

$$f(x)=\frac{1}{x}$$

Si hacemos una tabla de valores, obtenemos:

x	***f(x)***
1	1
10	0.1
100	0.01
1000	0.001

Observamos que, conforme *x* crece sin límite, los valores de la función se acercan cada vez más a 0. En símbolos:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$$

Los límites al infinito describen el comportamiento de una función cuando la variable crece sin límite.

Observa qué ocurre con la gráfica de $f(x)=1/x$ cuando x toma valores cada vez más grandes.

https://www.geogebra.org/classic/bhwwmmbb?embed

- ¿Qué ocurre con los valores de la función cuando x aumenta cada vez más?

- ¿A qué valor parece acercarse la función?

En algunos casos, una función se aproxima a un número fijo cuando *x* crece sin límite. Cuando eso ocurre, la recta horizontal

$$ y=L $$

se llama **asíntota horizontal**.

Es decir, si

$$ \lim_{x\to\infty} f(x)=L $$

entonces la gráfica de la función se acerca cada vez más a la recta $y=L$ cuando avanzamos hacia la derecha.

Actividad 2:

Distintas funciones pueden aproximarse a distintas rectas horizontales.
Explora en el siguiente applet cómo cambia la asíntota horizontal para **3** diferentes funciones:

- $n=1$, $f(x)=\frac{1}{x}$
- $n=2$, $f(x)=\frac{2x+1}{x}$
- $n=3$, $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2}$

https://www.geogebra.org/classic/fbtzrwct?embed

- ¿Qué recta parece describir el comportamiento de la función cuando $f(x)$ crece mucho?
- ¿Cómo se relaciona esa recta con el límite de la función?

Actividad 3

Para entender por qué aparece este comportamiento, analicemos la función algebraicamente.

Consideremos:

$$ f(x)=\frac{2x+1}{x} $$

Podemos reescribirla como

$$ f(x)=2+\frac{1}{x} $$

Como ya sabemos que $\frac{1}{x}\to 0$ cuando $x\to\infty$, se sigue que

$$ \lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x}=2 $$

Por lo tanto, la recta

$$ y=2 $$

es una asíntota horizontal de la función.

Preguntas para refexionar

- Si una función se acerca cada vez más a un número, ¿significa que necesariamente lo alcanza?
- ¿Puede una función tener dos asíntotas horizontales distintas?
- ¿Qué cambia cuando analizamos el comportamiento de la función cuando $x\to -\infty$?
- ¿Puede una función acercarse a un valor sin llegar nunca exactamente a él?

En resumen, los límites permiten describir el comportamiento de una función cuando la variable se aproxima a un valor o crece sin límite. En muchos casos, este comportamiento se resume mediante rectas llamadas asíntotas.

LÍMITES

Continuidad

Imagina que recorres la gráfica de una función con la punta de un lápiz.
Si puedes dibujarla sin levantar el lápiz del papel, decimos que la función es **continua**.

Una función es continua en un punto si su gráfica no presenta saltos, huecos ni interrupciones en ese punto.

Matemáticamente, esto significa que cuando x se acerca a un punto a, los valores de la función se acercan al valor de la función en ese punto.

Decimos que f es continua en a si:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Es decir, cuando el valor de la función coincide con el valor al que se aproxima la gráfica cuando x se acerca a ese punto.

De manera más precisa, una función $f(x)$ es continua en $x=a$ si se cumplen las siguientes tres condiciones:

1. $f(a)$ Existe
2. $\lim_{x \to a} f(x)$ Existe
3. Ambos valores coinciden

Actividad

En la definición de continuidad intervienen dos elementos: el **valor de la función en el punto** y el **límite de la función cuando nos acercamos a ese punto**.

En el siguiente applet podemos observar cómo estos dos valores se comportan cuando x se acerca a a.

Mueve los deslizadores y observa qué ocurre con el límite y con el valor de la función.

https://www.geogebra.org/classic/sf75nzdh?embed

- Mueve el punto a a lo largo de la gráfica.
  ¿Qué ocurre con los valores de la función cuando x se acerca a a?
- Compara el valor del límite $\lim_{x \to a} f(x)$ con el valor de $f(a)$
  ¿Qué relación observas entre ellos?

- ¿Se cumplen siempre las tres condiciones de continuidad en este ejemplo?
- ¿Qué ocurriría si el valor de la función en ese punto fuera distinto del valor al que se aproxima la gráfica?

Cuando alguna de estas condiciones falla, aparece una discontinuidad.

LÍMITES

Discontinuidades

En la sección anterior vimos que una función es continua en a cuando se cumplen tres condiciones:

1. $f(a)$ Existe
2. $lim_{x \to a} f(x)$ Existe
3. Ambos valores coinciden

Cuando alguna de estas condiciones falla, aparece una **discontinuidad.**

Existen distintas formas en que puede romperse la continuidad.

Tipo	Qué ocurre
Removible	el límite existe pero $f(a)$ es distinto o no está definido
Salto	los límites laterales son distintos
Infinita	la función crece sin límite

Actividad:

Explora el siguiente applet y cambia el tipo de discontinuidad utilizando el deslizador. Observa lo que ocurre en el punto $x=1$.

https://www.geogebra.org/classic/gwkruwph?embed

Preguntas:

- ¿Existe el valor de la función $f(1)$?
- ¿Existe el límite $lim_{x \to 1} f(x)$?
- ¿Coinciden ambos valores?
- ¿Cuál de las tres condiciones de continuidad deja de cumplirse en cada caso?, ¿Cómo se ve esa falla en la gráfica de la función?

Las discontinuidades aparecen cuando alguna de las condiciones de continuidad deja de cumplirse. Analizar qué ocurre con el límite y con el valor de la función en un punto nos permite entender la forma en que la gráfica “se rompe”.

En algunos casos, como en la discontinuidad infinita, los valores de la función crecen sin límite al acercarnos a un punto. Cuando esto ocurre, la recta vertical

$$x=a$$

se llama **asíntota vertical** de la función; escribimos:

$$lim_{x \to a} f(x) = \pm \infty$$

Así, el estudio de los límites no solo permite describir el comportamiento de una función cerca de un punto, sino también entender la estructura global de su gráfica.

Los límites describen cómo se comporta una función cuando la variable se aproxima a un valor o crece sin límite.
Cuando el valor de la función coincide con ese comportamiento, la función es continua.
Cuando alguna de estas condiciones falla, aparece una discontinuidad.

DERIVADAS

En muchos contextos no solo nos interesa conocer el valor de una función, sino también **cómo cambia**. Por ejemplo, podemos preguntar qué tan rápido se mueve un objeto, qué tan rápido crece una población o qué tan inclinada es una curva en un punto. En este capítulo estudiaremos la derivada como una herramienta para describir **cambios instantáneos** y entender el comportamiento local de las funciones.

El problema del cambio

Muchas cantidades en el mundo **cambian constantemente**.

- la velocidad de un automóvil
- la temperatura durante el día
- la altura de una pelota al ser lanzada
- el número de personas en una ciudad

Las matemáticas pueden describir **cuánto vale una cantidad en cada momento**.

Pero muchas veces queremos saber algo distinto:

¿qué tan rápido está cambiando esa cantidad en un instante?

Por ejemplo:

- ¿qué tan rápido se mueve un automóvil en este momento?
- ¿qué tan rápido cae una pelota en cierto instante?
- ¿qué tan inclinada está una curva en un punto?

Responder a esta pregunta llevó al desarrollo de una de las ideas centrales del cálculo:

la derivada.

El siguiente video presenta de manera visual este problema:
cómo medir el cambio de una función en un punto.

https://www.youtube.com/embed/9vKqVkMQHKk?si=XZuRL2j9roe-gcIW

Actividad

Una función describe la posición de un automóvil en el tiempo.

- ¿Qué significa que la pendiente de la gráfica en un punto sea positiva?
- ¿Qué significa que sea negativa?
- ¿Qué ocurre cuando la pendiente es cero?

En el video se muestra cómo una recta secante se aproxima a una tangente.
¿Qué ocurre con la pendiente de la recta cuando los dos puntos se acercan cada vez más?

Rectas Secantes y cambio promedio

En la página anterior nos preguntamos cómo medir el cambio **en un instante**.

Antes de responder eso, empecemos con algo más sencillo: **¿cómo medir el cambio entre dos puntos?**

Supongamos que una función describe la posición de un objeto en el tiempo. Si tomamos dos instantes distintos, podemos medir cuánto cambió la posición.

Esto nos da una medida del **cambio promedio**.

Geométricamente, esto corresponde a la pendiente de una recta que une dos puntos de la gráfica.

A esta recta se le llama **recta secante**.

Actividad

Explora el applet y responde:

- ¿Qué ocurre con la pendiente de la recta secante cuando cambias la distancia entre los puntos?
- ¿Qué sucede cuando los dos puntos están muy separados?
- ¿Qué ocurre cuando los puntos se acercan?
- ¿Cómo cambia la pendiente dependiendo de la posición del segundo punto respecto al primero?
- Cuando los dos puntos están muy cerca, ¿la recta secante parece acercarse a una recta en particular?

https://www.geogebra.org/classic/u4nsrhym?embed

Recta Tangente

En la página anterior vimos cómo una recta secante mide el cambio entre dos puntos.

Pero surge una pregunta natural:

¿qué ocurre cuando esos dos puntos se acercan cada vez más?

Al acercar los puntos, la recta secante parece estabilizarse. Esa recta especial tiene un nombre: **recta tangente.**

Actividad:

Mueve el control de la distancia entre puntos y observa qué ocurre con la recta secante cuando los puntos se acercan cada vez más.

Activa la opción “Mostrar recta tangente” y compara ambas rectas.

https://www.geogebra.org/classic/cpuuxnaa?embed

Responde las siguientes preguntas:

- ¿Qué ocurre con la recta secante cuando los puntos están muy cerca?
- ¿Parece acercarse a una recta en particular?
- ¿Cómo se compara la recta secante con la recta tangente?
- ¿Qué puedes decir de la pendiente de ambas rectas cuando los puntos están muy próximos?

A la recta que se obtiene cuando los puntos se acercan cada vez más se le llama **recta tangente**.

DERIVADAS

Definición de Derivada

En la página anterior vimos que, al acercar dos puntos, la recta secante se aproxima a una recta especial: la recta tangente.

Pero surge una pregunta: **¿cómo describir matemáticamente esa recta?**

Sabemos que la pendiente de la recta secante es:

$$\frac{f(x_0+\Delta{x})-f(x_0)}{\Delta{x}}$$

Si hacemos que la distancia entre los puntos, Δ{x} se acerque a 0, esta expresión se aproxima a la pendiente de la recta tangente.

A ese valor se le llama **derivada** de la función en el punto x_0 y se define como:

$$f'(x)=\lim_{\Delta{x} \to 0}\frac{f(x_0+\Delta{x})-f(x_0)}{\Delta{x}}$$

Esta expresión representa la pendiente de la recta tangente en el punto.

Es decir, describe el **cambio instantáneo** de la función.

Actividad

Explora el applet y responde:

- ¿Qué ocurre con la pendiente de la recta secante cuando la distancia entre los puntos tiende a cero?
- ¿A qué valor parece acercarse?
- ¿Cómo se relaciona este valor con la pendiente de la recta tangente?
- ¿Por qué necesitamos usar un límite para definir la pendiente en un punto?

https://www.geogebra.org/classic/ajcuxcqt?embed

La derivada permite describir cómo cambia una función en cada instante.

Es la herramienta que nos permite pasar de observar el cambio a **medirlo con precisión**.

APLICACIONES DE LA DERIVADA

Hasta ahora hemos construido la derivada a partir de la idea de cambio: primero como una razón de cambio promedio, luego como la pendiente de la recta tangente y, finalmente, como un límite.

Pero surge una pregunta natural:

¿para qué sirve la derivada?

En este capítulo exploraremos cómo interpretar la derivada en distintos contextos.

Veremos que la derivada no es solo una expresión algebraica, sino una herramienta que nos permite entender cómo cambian las cantidades: si crecen, decrecen, o alcanzan valores máximos o mínimos.

APLICACIONES DE LA DERIVADA

¿Qué mide la derivada?

En el capítulo anterior definimos la derivada como la pendiente de la recta tangente.

Pero ahora viene la pregunta más importante:

¿Qué mide la derivada?

La derivada mide cómo cambia una función en un punto.

Pero no cualquier cambio. Mide el **cambio instantáneo**.

Un ejemplo: movimiento

Imagina que una función $f(t)$ describe la posición de un objeto a lo largo del tiempo.

En ese caso, la derivada $f'(t)$ nos dice:

qué tan rápido se mueve el objeto en ese instante

Es decir, su **velocidad**.

Actividad:

Explora el applet y responde:

- ¿Qué representa la función en este contexto?
- ¿Qué representa la pendiente de la recta tangente?
- ¿Qué ocurre con la velocidad cuando cambias el punto t_0?
- ¿En qué puntos la velocidad es positiva? ¿y en cuáles negativa?
- ¿Qué significa que la velocidad sea cero en un instante?
- ¿La velocidad es la misma en todos los puntos? Explica.

https://www.geogebra.org/classic/ncw52cux?embed

En este contexto, la derivada representa la velocidad instantánea: qué tan rápido se mueve el objeto en cada momento.

APLICACIONES DE LA DERIVADA

Crecimiento y Decrecimiento

Hasta ahora vimos que la derivada nos dice qué tan rápido cambia una función.

Pero hay algo aún más importante:

¿la función está aumentando o disminuyendo?

La derivada no solo mide rapidez.

También nos dice la dirección del cambio.

El signo de la pendiente de la recta tangente determina si la función crece o decrece.

Si la derivada es positiva, la función está creciendo.	$f'(x)>0$
Si la derivada es negativa, la función está decreciendo.	$f'(x)<0$
Si la derivada es cero, la función no está cambiando en ese instante.	$f'(x)=0$

En el ejemplo del movimiento:

- velocidad positiva → el objeto avanza
  - velocidad negativa → el objeto retrocede
  - velocidad cero → el objeto se detiene momentáneamente

Actividad:

Explora el applet y responde:

- ¿En qué intervalos la función está creciendo?, ¿En cuáles está decreciendo?
- ¿Qué ocurre en los puntos donde la velocidad es cero?
- ¿La función cambia de comportamiento en esos puntos? Explica.
- ¿Cómo se relaciona el signo de la derivada con el comportamiento de la función?
- ¿Podemos usar la derivada para encontrar máximos y mínimos?

https://www.geogebra.org/classic/hgrjuz8g?embed

La derivada no solo mide rapidez: también indica la dirección del cambio.

El signo de la derivada permite entender el comportamiento de una función a lo largo de su dominio.

APLICACIONES DE LA DERIVADA

Máximos y Mínimos

Hay puntos especiales donde la derivada es cero.
En esos puntos, la función deja de crecer o decrecer momentáneamente.
Estos puntos se llaman **puntos críticos**.

Pero surge una pregunta importante:

Si una función deja de crecer y empieza a decrecer, ¿qué ocurre en ese punto?

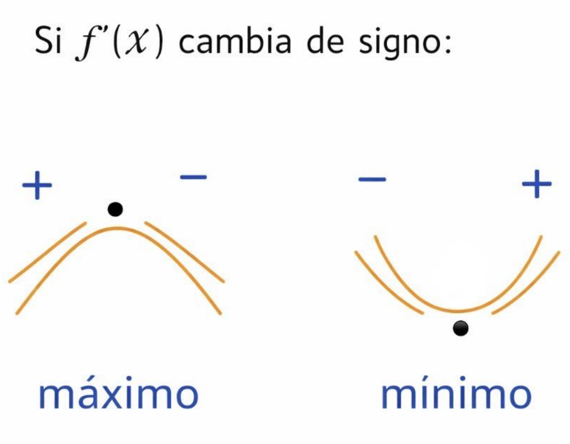
Un **máximo** ocurre cuando la función pasa de crecer a decrecer, es decir, cuando la derivada cambia de positiva a negativa.

Un **mínimo** ocurre cuando la función pasa de decrecer a crecer; es decir, cuando la derivada cambia de negativa a positiva.

Hasta ahora vimos que cuando la derivada es cero, la función no está cambiando en ese instante. Pero eso no es suficiente para determinar el comportamiento de la función.

¿La función va a empezar a subir o a bajar?, eso depende de cómo cambia la derivada alrededor del punto.

Lo importante no es solo que $f'(x)=0$, sino **qué pasa alrededor del punto**.



Ejemplo

Considera la función $f(x)=x^2$

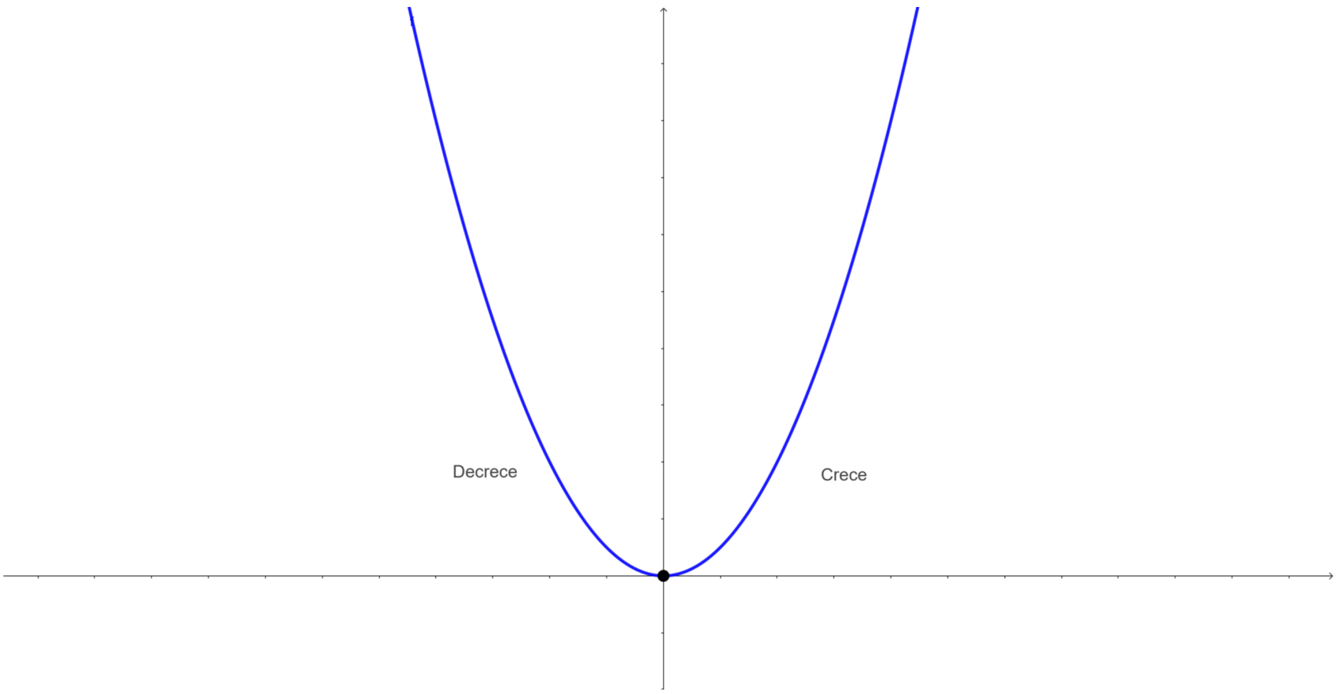
Observando la gráfica:

- Cuando $x<0$ la función **decrece**
- Cuando $x>0$, la función **crece**

Esto nos indica que:

- La derivada es **negativa** antes de $x=0$
- La derivada es **positiva** después de $x=0$

En $x=0$ la derivada es cero y cambia de negativa a positiva, Por lo tanto la función tiene un **mínimo**.



Pero… ¿qué pasa si la derivada es cero y la función no tiene ni máximo ni mínimo?…

Puntos críticos

Hasta ahora parece que cuando la derivada es cero, la función tiene un máximo o un mínimo, pero, ¿siempre es así?

Veamos un ejemplo donde esto no ocurre.

https://www.geogebra.org/classic/cdcekyum?embed

En ambos casos, la derivada en $x=0$ es cero, sin embargo, el comportamiento de las funciones es distinto.

En x^2, la función cambia de decrecer a crecer.

En x^3, la función sigue creciendo antes y después del punto.

Que la derivada sea cero **no es suficiente** para determinar un máximo o mínimo.

Actividad:

Observa el applet y responde:

- ¿Qué valor tiene la derivada en $x=0$ para ambas funciones?
- ¿Cómo se comporta cada función antes y después de ese punto?
- ¿En cuál de las dos hay un cambio de crecimiento a decrecimiento?
- ¿Qué diferencia fundamental observas entre ambos casos?

Que la derivada sea cero no garantiza un máximo o mínimo.
Lo que realmente importa es el **cambio de signo**.

CURVATURA DE LAS FUNCIONES

Hasta ahora hemos utilizado la derivada para entender cómo cambia una función:
si crece, decrece o alcanza valores máximos o mínimos.

Pero aún hay algo más por explorar.

Podemos preguntarnos:

¿cómo cambia ese cambio?

Es decir, no solo si una función sube o baja, sino **cómo se curva su gráfica**.

En este capítulo estudiaremos la forma de las funciones:
veremos cuándo se curvan hacia arriba, cuándo lo hacen hacia abajo y qué ocurre en los puntos donde este comportamiento cambia.

Descubriremos que la gráfica de una función no solo tiene dirección, sino también **curvatura**, y que esto nos da información más profunda sobre su comportamiento.

CURVATURA DE LAS FUNCIONES

¿Cómo se curva una función?

Hasta ahora hemos descrito si una función crece o decrece.

Pero eso no cuenta toda la historia.

Dos funciones pueden crecer y sin embargo verse completamente distintas.

La diferencia está en **cómo se curvan sus gráficas**.

https://www.geogebra.org/classic/amqjdmqx?embed

Observa cómo cambia la forma de la gráfica al mover el punto.

En algunos intervalos, la función se curva hacia abajo.
En otros se curva hacia arriba.

Hay un punto donde este comportamiento cambia.

Actividad:

Observa el applet y responde:

- ¿En qué parte la gráfica se curva hacia abajo?
- ¿En qué parte se curva hacia arriba?
- ¿En qué punto cambia la curvatura?
- ¿La función deja de crecer en ese punto?
- ¿Qué tiene de distinto ese punto respecto a los demás?

A partir de lo observado decimos que una función es:

- **cóncava hacia arriba** cuando la gráfica se abre hacia arriba
- **cóncava hacia abajo** cuando la gráfica se abre hacia abajo

El punto donde la gráfica cambia de curvatura se llama **punto de inflexión**.

No basta con saber si una función crece o decrece. También importa **cómo se curva**.

¿Qué nos dice la derivada sobre la curvatura?

Hasta ahora hemos descrito la curvatura de una función observando su gráfica. Pero surge una pregunta natural:

¿podemos entender esto usando la derivada?

https://www.geogebra.org/classic/dzvdxdzg?embed

Observa la recta tangente al mover el punto.

En algunos intervalos, la pendiente de la recta tangente va disminuyendo.
En otros, va aumentando.

Esto está directamente relacionado con la forma de la gráfica.

Cuando la pendiente va aumentando, la gráfica es **cóncava hacia arriba**.

Cuando la pendiente va disminuyendo, la gráfica es **cóncava hacia abajo**.

Actividad:

Observa el applet y responde:

- ¿En qué parte la pendiente de la tangente va aumentando?
- ¿En qué parte va disminuyendo?
- ¿Cómo se relaciona esto con la curvatura de la gráfica?
- ¿Qué ocurre con la pendiente en el punto donde cambia la curvatura?

La curvatura de una función está relacionada con cómo cambia su pendiente.

No solo importa el valor de la derivada, sino **cómo cambia a lo largo del tiempo**.

CURVATURA DE LAS FUNCIONES

La segunda derivada

En la página anterior vimos que la curvatura de una función está relacionada con cómo cambia su pendiente.

Ahora vamos a describir esto usando derivadas.

La derivada nos dice cuál es la pendiente de la función.

Si queremos saber **cómo cambia esa pendiente**, necesitamos derivar otra vez.

Definición:

A la derivada de la derivada se le llama **segunda derivada**, y se denota por $f''(x)$

- Si $f''(x) > 0$, la pendiente va aumentando y la gráfica es **cóncava hacia arriba**.
- Si $f''(x) < 0$, la pendiente va disminuyendo y la gráfica es **cóncava hacia abajo**.

Cuando la segunda derivada cambia de signo, la gráfica cambia de curvatura.

A ese punto se le llama **punto de inflexión**.

https://www.geogebra.org/classic/w2bvused?embed

Actividad:

Observa el applet y responde:

- ¿En qué intervalos la segunda derivada es positiva?
- ¿En cuáles es negativa?
- ¿En qué punto cambia de signo?
- ¿Qué ocurre con la gráfica en ese punto?

La segunda derivada nos permite entender cómo cambia la pendiente de una función.

Con esto podemos describir mejor su comportamiento.

REGLAS DE DERIVACIÓN

En este capítulo veremos cómo calcular derivadas de forma sistemática.

A partir de las ideas desarrolladas anteriormente, introduciremos reglas que permiten derivar funciones de manera eficiente.

REGLAS DE DERIVACIÓN

¿Cómo calcular derivadas?

Hasta ahora hemos usado la derivada para entender cómo cambian las funciones.

Pero surge una nueva pregunta:

¿cómo se calculan en la práctica?

Existen reglas que nos permiten derivar funciones de manera directa. Algunas son muy simples, pero incluso las más básicas tienen una idea detrás.

Por ejemplo, en el siguiente video se presenta una forma visual de entender cómo se deriva una potencia:

https://www.youtube.com/embed/S0_qX4VJhMQ?si=CqNrSQmqqp6GwXuv

Esto muestra que las reglas de derivación no son arbitrarias, sino que reflejan cómo cambian las funciones

$$(x^n)'=nx^{n-1}$$

Ejemplos:

1. $(x^2)'=2x$
2. $x^{-1})'=-x^{-2}$
3. $(x^{\frac{1}{2}})'=\frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}$

A partir de esta idea, podemos construir reglas para derivar funciones más complejas.

A continuación veremos las reglas básicas paso a paso.

REGLAS DE DERIVACIÓN

Regla de la suma y constante

Las reglas más básicas permiten derivar sumas de funciones y constantes de manera directa.

Regla de la suma:

$$(f+g)'=f'+g'$$

Derivar una suma consiste en derivar cada término por separado.

Regla de la constante:

$$(c)'=0$$

$$(cf)'=cf'$$

Ejemplos:

1. $(x^3+x^2)'=3x^2+2x$
2. $(5x^2)'=5*(2x)=10x$
3. $(7)'=0$

Estas reglas nos permiten derivar expresiones más completas combinando términos.

REGLAS DE DERIVACIÓN

Regla del producto

Cuando una función es el producto de dos funciones, su cambio depende de cómo cambia cada una de ellas.

Regla:

$$(fg)'=f'g+fg'$$

Para derivar un producto, se deriva una función y se deja la otra igual, y luego se invierten los papeles.

Es importante notar que:

$$(fg)' \neq f'g'$$

Ejemplo:

$$(x^2 x^3)'=(2x)x^3+(x^2)(3x^2)$$

Esta regla nos permite derivar productos de funciones de manera sistemática.

REGLAS DE DERIVACIÓN

Regla de la cadena

Cuando una función está dentro de otra, su cambio ocurre en dos niveles.

Regla:

$$(f(g(x))'=f'(g(x))*g'(x)$$

Interpretación:

Para derivar una función compuesta:

- se deriva la función exterior
- se evalúa en la función interior
- y se multiplica por la derivada de la interior

Idea intuitiva:

El cambio de la función depende tanto de cómo cambia la función exterior como de cómo cambia la interior.

Ejemplo:

Si $f(x)=(x^2+1)^3$, entonces:

$$\frac{d}{dx}(x^2+1)^3=3(x^2+1)^2(2x)$$

Es importante identificar correctamente qué parte es la función exterior y cuál es la interior.

Esta regla nos permite derivar funciones más complejas construidas a partir de otras más simples.

Para una explicación visual de esta idea, se puede consultar **este video.**

REGLAS DE DERIVACIÓN

Regla del cociente

Cuando una función es el cociente de dos funciones, su derivada se calcula con la siguiente regla.

Regla:

$$(\frac{f}{g})'=\frac{f'g-fg'}{g^2}$$

Es importante cuidar el orden de los términos en el numerador.

Esta regla permite derivar cocientes de funciones de manera sistemática.

Ejemplo:

$$\frac{x^2}{x+1}=\frac{2x(x+1)-x^2(1)}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$$

Nota: Esta regla puede obtenerse al escribir:

$$(\frac{f}{g})'=f*g^{-1}$$

y aplicar las reglas del producto y la cadena.

SERIES DE TAYLOR Y APROXIMACIÓN

En este capítulo veremos cómo aproximar funciones complicadas usando polinomios.

A partir de la información local de una función, como sus derivadas en un punto, construiremos aproximaciones cada vez más precisas.

Estas ideas permiten describir funciones complejas mediante expresiones más simples y son fundamentales en matemáticas, física, economía e ingeniería.

SERIES DE TAYLOR Y APROXIMACIÓN

¿Cómo aproximar una función?

Muchas funciones son complicadas de calcular exactamente.

Sin embargo, cerca de un punto, su comportamiento puede parecerse mucho al de un polinomio.

Ya vimos que la recta tangente aproxima una función cerca de un punto.

Pero una recta solo captura parte del comportamiento.

¿Qué ocurre si usamos polinomios de mayor grado?

Observa cómo cambia la aproximación al modificar el grado del polinomio y el punto de interés.

https://www.geogebra.org/classic/xpsep4np?embed

Al aumentar el grado del polinomio, la aproximación mejora cerca del punto elegido.

En algunos casos, un polinomio puede reproducir el comportamiento de la función de manera sorprendente.

Actividad:

Observa el applet y responde:

- ¿Qué ocurre al aumentar el grado del polinomio?
- ¿En qué región la aproximación es mejor?
- ¿Qué pasa al alejarse del punto \(x_0\)?
- ¿Todas las funciones parecen aproximarse igual de bien?

Las derivadas no solo describen cómo cambia una función; también permiten construir a **proximaciones polinomiales** capaces de imitar su comportamiento local.

SERIES DE TAYLOR Y APROXIMACIÓN

Polinomio de Taylor

La idea detrás de las aproximaciones anteriores es construir un polinomio que comparta cada vez más información con la función original en un punto.

El polinomio de Taylor utiliza los valores de la función y de sus derivadas para construir una aproximación local.

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

Interpretación:

Cada término del polinomio incorpora información sobre cómo cambia la función:

- el valor de la función
- su pendiente
- su curvatura
- y cambios de orden superior

Ejemplo:

El polinomio de Taylor de orden 2 para e^x alrededor de $x_0=0$ es:

$$1+x+\frac{x^2}{2}$$

Caso particular: Polinomio de Maclaurin

Cuando el punto de expansión es $x_0=0$, el polinomio recibe el nombre de polinomio de Maclaurin.

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x)^k$$

Observa cómo cambia la aproximación al modificar el grado del polinomio y el punto de expansión x_0.

https://www.geogebra.org/classic/zksznnvu?embed

Actividad:

Observa el applet y responde:

- ¿Qué información de la función utiliza el polinomio?
- ¿Qué ocurre al aumentar el grado n?
- ¿Por qué la aproximación funciona mejor cerca de x_0?
- ¿Qué cambia cuando $x_0=0$?

Los polinomios de Taylor permiten aproximar funciones complejas usando únicamente información local obtenida a partir de derivadas.

SERIES DE TAYLOR Y APROXIMACIÓN

Error en la aproximación

Un polinomio de Taylor no siempre coincide exactamente con la función original.

La diferencia entre ambos se conoce como error de aproximación.

En general, el error:

- disminuye al aumentar el grado del polinomio
- y es menor cerca del punto de expansión x_0.

Idea conceptual:

La diferencia entre la función y el polinomio aproximante se conoce como error de aproximación.

$$E_n(x)=f(x)-P_n(x)$$

Observa cómo la diferencia entre la función y el polinomio aproximante cambia al aumentar el grado.

https://www.geogebra.org/classic/gwjkgk45?embed

Actividad:

Observa el applet y responde:

- ¿Qué ocurre con la aproximación cuando$n=1$?
- ¿Cómo cambia el error al aumentar el grado a $n=5$?
- ¿En qué regiones la aproximación parece ser mejor?
- ¿Qué ocurre al alejarnos de $x=0$?
- ¿El error desaparece completamente?

Estimación del error:

El applet muestra que la aproximación mejora cerca de x_0 y al aumentar el grado del polinomio.

Pero surge una pregunta natural:

¿podemos estimar matemáticamente qué tan grande es el error?

El error puede estimarse mediante la fórmula de Lagrange:

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

para algún valor c entre x y x_0.

Esta expresión muestra que el error depende de varios factores:

- la distancia al punto de expansión
- el grado del polinomio
- y el comportamiento de derivadas de orden superior.

Los polinomios de Taylor permiten aproximar funciones complejas utilizando información local obtenida a partir de derivadas. La fórmula del error ayuda a entender qué tan precisa es esa aproximación.

LA INTEGRAL

Hasta ahora hemos utilizado la derivada para describir cómo cambian las funciones.

La integral surge de una idea distinta: acumular cantidades pequeñas para aproximar un valor total.

A lo largo de este capítulo veremos cómo aproximar áreas, construir sumas de Riemann y definir la integral como un proceso de acumulación.

Finalmente, descubriremos la relación entre derivadas e integrales mediante el Teorema Fundamental del Cálculo.

¿Cómo reconstruir una cantidad?

En el estudio de derivadas, partimos de una posición para entender cómo cambia una cantidad.

En integración ocurre lo contrario: conocemos pequeños cambios y buscamos reconstruir la cantidad total acumulada.

Por ejemplo, si conocemos la velocidad de un objeto en cada instante, ¿podemos determinar la distancia total recorrida?

Una forma de aproximar esta acumulación consiste en dividir el intervalo en partes pequeñas y usar rectángulos.

https://www.geogebra.org/classic/u7utbrp4?embed

Actividad:

Observa el applet y responde:

- ¿Qué ocurre al aumentar el número de particiones?
- ¿Cómo cambia la aproximación?
- ¿Los rectángulos parecen aproximar mejor la región al aumentar \(n\)?
- ¿Crees que la aproximación podría acercarse a un valor exacto?

La integral surge de la idea de acumular pequeños cambios para reconstruir una cantidad total.

LA INTEGRAL

Sumas de Riemann

En la página anterior aproximamos una cantidad acumulada utilizando rectángulos.

Ahora daremos nombre y estructura matemática a esa idea.

Una suma de Riemann aproxima una acumulación dividiendo un intervalo en partes pequeñas y sumando áreas de rectángulos.

La altura de cada rectángulo se obtiene evaluando la función en un punto del subintervalo.

Dependiendo del punto elegido, pueden obtenerse aproximaciones distintas.

https://www.geogebra.org/classic/td7yxuwm?embed

Notación:

Si dividimos el intervalo $[a,b]$ en n partes y usamos un punto de muestra y_i en cada subintervalo, la suma de Riemann puede escribirse como:

$$\sum_{i=1}^{n} f(y_i)\,\Delta x$$

donde

$$\Delta x=\frac{b-a}{n}$$

Actividad:

Observa el applet y responde:

- ¿Cómo cambia la aproximación al mover el parámetro t?
- ¿Qué ocurre cuando se usan más particiones?
- ¿Las aproximaciones obtenidas parecen acercarse a un mismo valor?
- ¿Por qué distintos puntos de muestra producen resultados distintos?
- ¿Qué crees que ocurriría si el número de particiones creciera indefinidamente?

Las sumas de Riemann permiten aproximar cantidades acumuladas mediante sumas finitas.

La integral surgirá al considerar el límite de estas aproximaciones cuando el número de particiones aumenta indefinidamente.

La integral definida

En las sumas de Riemann aproximamos una cantidad acumulada usando un número finito de rectángulos.

Pero, ¿qué ocurre si aumentamos indefinidamente el número de particiones?

Cuando el ancho de los subintervalos se hace cada vez más pequeño, las aproximaciones pueden acercarse a un valor límite.

Ese valor se define como la integral definida de la función en el intervalo $[a, b]$

Definición:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(y_i)\,\Delta x$$

Interpretación:

La integral definida representa una cantidad acumulada obtenida a partir de infinitas aproximaciones cada vez más precisas.

https://www.geogebra.org/classic/hctg3hwz?embed

Actividad:

Observa el applet y responde:

- ¿Qué ocurre con la suma de Riemann cuando n aumenta?
- ¿Las aproximaciones obtenidas con distintos valores de t parecen acercarse al mismo número?
- ¿Qué representa el valor límite de estas aproximaciones?
- ¿Por qué la integral puede interpretarse como una acumulación?

La integral definida surge como el límite de sumas de Riemann.

Esta construcción permite describir acumulaciones continuas mediante funciones.

LA INTEGRAL

El Teorema Fundamental del Cálculo

La derivada estudia cómo cambia una cantidad.

La integral acumula pequeños cambios.

¿Existe una conexión entre ambas ideas?

Supongamos que definimos:

$$A(x)=\int_a^x f(t)dt$$

donde $A(x)$ representa la cantidad acumulada desde a hasta x.

Al mover x, el área cambia.

Pero, ¿a qué razón cambia?

Observa el siguiente applet:

https://www.geogebra.org/classic/kewwmw4s?embed

Teorema Fundamental del Cálculo (Acumulación y derivada):

El Teorema Fundamental del Cálculo afirma que:

$$\mathbf{A'(x)=f(x)}$$

Es decir:

la derivada de la acumulación recupera la función original.

Teorema Fundamental del Cálculo (Evaluación de integrales):

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$$

donde

$$F'(x)=f(x)$$

El cálculo diferencial y el cálculo integral no son ideas separadas: **son procesos inversos.**

Actividad:

Reflexiona y responde:

- ¿Cómo se relacionan las ideas de cambio y acumulación?
- ¿Por qué el Teorema Fundamental del Cálculo conecta derivadas e integrales?
- ¿Qué representa la función $A(x)$?
- ¿Qué significa que $A'(x)=f(x)$?

El Teorema Fundamental del Cálculo unifica las dos ideas centrales del cálculo: cambio y acumulación.

Antiderivadas e integrales indefinidas

Distintas funciones pueden tener exactamente la misma derivada.

Por ejemplo, todas las funciones de la forma:

$$x^2 + C$$

tienen derivada:

$$2x$$

Una **antiderivada** de $f(x)$ es una función cuya derivada es $f(x)$, es decir: $F'(x)=f(x)$

Como las constantes desaparecen al derivar, una función suele tener infinitas antiderivadas.

https://www.geogebra.org/classic/ngvtnqk3?embed

Definición:

$$\int f(x)\,dx = F(x)+C$$

Una **condición inicial** permite seleccionar una función específica dentro de la familia de antiderivadas.

Actividad:

- ¿Qué efecto tiene cambiar C?
- ¿Las funciones cambian su derivada?
- ¿Por qué aparece la constante de integración?
- ¿Cómo puede una condición inicial determinar una única solución?

La integral indefinida representa una familia de funciones con la misma derivada.

La constante de integración refleja que derivar elimina información sobre desplazamientos verticales.

MÉTODOS BÁSICOS DE INTEGRACIÓN

Aunque derivar una función suele seguir reglas relativamente sistemáticas, integrar puede ser considerablemente más desafiante.

Muchos métodos de integración pueden entenderse como procesos inversos de reglas de derivación ya conocidas.

En este capítulo estudiaremos dos de los métodos más importantes:

- la sustitución, relacionada con la regla de la cadena
- la integración por partes, relacionada con la regla del producto

MÉTODOS BÁSICOS DE INTEGRACIÓN

Sustitución

La regla de la cadena permite derivar composiciones de funciones.

El método de sustitución surge al intentar deshacer ese proceso.

El método de sustitución consiste en reemplazar una expresión complicada por una nueva variable más simple.

La relación entre ambos procesos puede resumirse esquemáticamente como:

$$(f(g(x)))' \;\leftrightarrow\; \text{sustitución}$$

La sustitución puede interpretarse como una manera de “deshacer” la regla de la cadena.

Ejemplo:

$$\int 2x(x^2+1)^3\,dx$$

Aquí

$$u=x^2+1$$

Entonces:

$$du=2x\,dx$$

La integral se transforma en:

$$\int u^3\,du$$

Actividad:

- ¿Qué expresión parece conveniente sustituir por una nueva variable?
- ¿Por qué aparece naturalmente el término $2x$?
- ¿Cómo se relaciona este método con la regla de la cadena?

El método de sustitución simplifica integrales al reconocer estructuras provenientes de composiciones de funciones.

MÉTODOS BÁSICOS DE INTEGRACIÓN

Integración por partes

La integración por partes surge al reorganizar la regla del producto.

Recordatorio:

$$
(fg)' = f'g + fg'
$$

Idea principal:

Si integramos la regla del producto:

$$
fg=\int f'g\,dx+\int fg'\,dx
$$

Despejando una de las integrales:

$$
\int fg'\,dx = fg-\int f'g\,dx
$$

Así:

Fórmula de Integración por partes:

$$\int u\,dv = uv-\int v\,du$$

$$
(fg)'
\;\leftrightarrow\;
\text{integración por partes}
$$

Ejemplo:

$$
\int x^2(x+1)\,dx
$$

$$
u=x
$$

\qquad
dv=(x+1)dx
\)

\(
du=2dx
\qquad
v=\frac{(x+1)^2}{2}
\)

En algunos casos, una integral puede resolverse mediante distintos métodos. Elegir un método adecuado suele depender de reconocer la estructura de la integral.

La integración por partes resulta especialmente útil cuando aparece un producto de funciones cuya derivada o antiderivada simplifica la expresión.

A diferencia de la derivación, integrar suele requerir reconocer patrones y elegir estrategias adecuadas.

Más allá de los métodos básicos

A diferencia de muchas derivadas, las integrales pueden ser considerablemente más difíciles de calcular.

Existen numerosos métodos de integración y, en muchos casos, no es posible expresar una integral mediante funciones elementales.

De hecho, algunas integrales importantes deben aproximarse numéricamente.

Resolver integrales suele requerir reconocer patrones, probar estrategias distintas y, en ocasiones, aceptar que no existe un camino inmediato hacia la solución.

El estudio de las integrales ha impulsado durante siglos el desarrollo de nuevas ideas matemáticas.

Integrar no siempre consiste en aplicar una receta: muchas veces **implica explorar, reorganizar ideas y construir aproximaciones.**

FUNCIONES FUNDAMENTALES DEL CÁLCULO

Algunas funciones aparecen constantemente en cálculo debido a la manera en que modelan cambio, acumulación y comportamiento periódico.

En este capítulo estudiaremos funciones trigonométricas, logarítmicas y exponenciales desde la perspectiva del cálculo diferencial e integral.

Más que enfocarnos únicamente en sus propiedades algebraicas, exploraremos cómo estas funciones describen fenómenos de crecimiento, oscilación y acumulación, y por qué ocupan un papel central en las matemáticas aplicadas.

FUNCIONES FUNDAMENTALES DEL CÁLCULO

Funciones Trigonométricas en Cálculo

Muchas funciones en cálculo describen fenómenos que cambian de manera periódica.

Oscilaciones, ondas, vibraciones y movimientos repetitivos aparecen naturalmente en modelos físicos, biológicos y económicos.

Las funciones **seno** y **coseno** son fundamentales porque su comportamiento oscilatorio permite modelar cambios cíclicos.

Además, sus derivadas e integrales conservan la misma estructura trigonométrica, lo que las hace especialmente importantes en cálculo.

Derivadas básicas:

$$\frac{d}{dx}(\sin x)=\cos x$$

$$\frac{d}{dx}(\cos x)=-\sin x$$

Integrales básicas:

$$\int \cos x\,dx=\sin x + C$$

$$\int \sin x\,dx=-\cos x + C$$

A diferencia de muchas otras funciones, las funciones trigonométricas reaparecen constantemente al derivar e integrar.

Esta propiedad explica por qué son tan útiles para modelar fenómenos periódicos.

https://www.geogebra.org/classic/cur8gmww?embed

Actividad:

- ¿Qué relación observas entre la pendiente de $\sin{x}$ y los valores del $\cos{x}$?
- ¿En qué puntos la pendiente de $\sin{x}$ es cero?
- ¿Cuándo la pendiente es positiva o negativa?
- ¿Por qué las funciones trigonométricas son útiles para modelar fenómenos periódicos?
- ¿Qué ocurre al derivar repetidamente funciones trigonométricas?

Las funciones trigonométricas ocupan un papel central en cálculo debido a la manera en que describen cambios periódicos y conservan su estructura al derivar e integrar.

FUNCIONES FUNDAMENTALES DEL CÁLCULO

La función logarítmica

A diferencia de muchas funciones conocidas, el logaritmo natural puede construirse directamente a partir de una integral.

Su definición surge de estudiar cómo se acumula el área bajo la curva:

$$y=\frac1x$$

Definición:

Definimos la función logarítmica natural mediante:

$$\ln(x)=\int_1^x \frac1t\,dt$$

Es decir, $\ln(x)$ representa el área acumulada bajo la curva $y=\frac{1}{x}$ desde 1 hasta x.

Interpretación:

Cuando x aumenta, el área acumulada sigue creciendo.

Sin embargo, como: $\frac1x$ disminuye lentamente, el crecimiento del logaritmo también se vuelve cada vez más lento.

https://www.geogebra.org/classic/yhmd7z6t?embed

Actividad:

- ¿Qué representa geométricamente $ln(x)$?
- ¿Qué ocurre con el área acumulada cuando x aumenta?
- ¿Por qué el logaritmo crece cada vez más lentamente?
- ¿Qué relación existe entre acumulación y la función logarítmica?

El logaritmo natural puede interpretarse como una función de acumulación construida a partir de áreas.

Esta definición conecta directamente el logaritmo con el cálculo integral.

FUNCIONES FUNDAMENTALES DEL CÁLCULO

Una propiedad fundamental del logaritmo

La definición del logaritmo como área acumulada permite descubrir propiedades sorprendentes.

Una de las más importantes es que el logaritmo transforma productos en sumas

Definimos

$$A(x)=\int_1^x \frac1t\,dt$$

Una consecuencia notable de esta definición es que el logaritmo transforma productos en sumas:

$$\ln{xy} = \ln{x} + \ln{y}$$

El siguiente applet permite explorar visualmente esta propiedad mediante áreas acumuladas.

https://www.geogebra.org/classic/xjneaeb7?embed

Actividad:

- ¿Qué ocurre con $A(x) + A(y)$ al mover los deslizadores?
- ¿Cómo se compara con $A(xy)$?
- ¿Por qué esta propiedad puede simplificar cálculos con productos?
- ¿Qué relación observas entre multiplicar números y sumar logaritmos?

Esta propiedad convirtió a los logaritmos en una herramienta fundamental para realizar cálculos mucho antes de la existencia de las calculadoras electrónicas.

Además nos permite deducir otras relaciones útiles:

$$\ln{\frac{x}{y}} = \ln{x} - \ln{y}$$

$$\ln{x^n} = n \ln{x}$$

Estas propiedades muestran cómo el logaritmo transforma productos, cocientes y potencias en operaciones aditivas más sencillas.

La función exponencial

La función exponencial surge como la inversa del logaritmo natural.

Si:

$$y=\ln(x)$$

entonces existe una función que "deshace" el logaritmo:

$$x=e^y$$

La función exponencial posee una propiedad extraordinaria:

$$\frac{d}{dx}(e^x)=e^x$$

Es decir, la función coincide con su propia derivada.

Interpretación:

Esto implica que la razón de cambio de la función es proporcional a su valor actual.

Por esta razón, la función exponencial aparece naturalmente en modelos de:

- crecimiento poblacional
- interés compuesto
- desintegración radiactiva
- difusión
- procesos biológicos y económicos.

https://www.geogebra.org/classic/wzzbfn2j?embed

Actividad:

- ¿Qué observas entre el valor de e^x y la pendiente de la tangente?

- ¿Por qué la función exponencial crece cada vez más rápido?
- ¿Qué significa que una función sea igual a su derivada?
- ¿Por qué este comportamiento es útil para modelar crecimiento?

La función exponencial ocupa un lugar central en cálculo debido a que su comportamiento de crecimiento se conserva al derivar e integrar.

Su relación con el logaritmo natural conecta acumulación y crecimiento.

FUNCIONES FUNDAMENTALES DEL CÁLCULO

Derivadas e integrales

Algunas funciones aparecen constantemente en cálculo porque sus derivadas e integrales conservan estructuras simples y útiles.

Funciones trigonométricas:

$$(\sin x)'=\cos x$$

$$(\cos x)'=-\sin x$$

$$\int \sin x\,dx=-\cos x+C$$

$$\int \cos x\,dx=\sin x+C$$

Las funciones trigonométricas conservan un comportamiento periódico al derivar e integrar.

Logartimo Natural:

$$\frac{d}{dx}\ln(x)=\frac1x$$

$$\int \frac1x\,dx=\ln|x|+C$$

El logaritmo natural surge de la acumulación asociada a la función $y=\frac{1}{x}$

Exponencial:

$$
\frac{d}{dx}(e^x)=e^x
$$

$$
\int e^x\,dx=e^x+C
$$

La función exponencial conserva exactamente la misma forma al derivar e integrar.

Muchas de las funciones más importantes del cálculo reaparecen constantemente porque sus derivadas e integrales conservan estructuras simples y útiles.

APLICACIONES DE LA INTEGRAL

Hasta ahora hemos utilizado la integral para calcular áreas y para reconstruir funciones a partir de sus tasas de cambio.

Sin embargo, la idea de integración va mucho más allá de estos primeros ejemplos.

Siempre que una cantidad pueda interpretarse como la acumulación de pequeñas contribuciones, la integral proporciona una herramienta natural para calcularla.

En este capítulo exploraremos algunas aplicaciones clásicas de la integral, incluyendo áreas entre curvas, volúmenes de revolución y valores promedio.

Más allá de las fórmulas, el objetivo será reconocer una idea común: la integral permite construir cantidades globales a partir de información local.

APLICACIONES DE LA INTEGRAL

Área entre curvas

Ya sabemos cómo calcular el área bajo una curva.

Pero muchas regiones de interés no están delimitadas por una función y el eje x sino por dos curvas distintas.

¿Cómo podemos calcular el área comprendida entre ellas?

Supongamos que una región está limitada por dos funciones:

$$f(x)$$

y

$$g(x)$$

con $f(x)$ por encima de $g(x)$ en el intervalo $[a, b]$

En cada punto del intervalo, la distancia vertical entre la curva superior y la curva inferior es:

$$f(x) - g(x)$$

Por lo tanto, el área total puede obtenerse acumulando estas diferencias a lo largo del intervalo.

$$A(x) = \int_a^b [f(x) - g(x))] dx$$

Es importante identificar cuál función se encuentra arriba y cuál abajo, ya que el área se obtiene acumulando la distancia vertical entre ambas curvas.

Cuando las funciones se cruzan dentro del intervalo, suele ser necesario dividir la región en varias partes.

https://www.geogebra.org/classic/svtvvvga?embed

Actividad:

- ¿Qué representa la diferencia $f(x) - g(x)$?
- ¿Qué ocurre si las dos curvas se acercan?
- ¿Cómo cambia el área cuando modificas alguna de las funciones?
- ¿Por qué restamos las funciones para calcular el área?

- ¿Qué ocurre cuando las funciones intercambian posiciones?
- ¿Sigue siendo válida la fórmula sin modificaciones?
- ¿Cómo identificar cuál función debe restarse de cuál?

El área entre curvas puede interpretarse como la acumulación de pequeñas diferencias entre dos funciones.

Esta idea permite extender el concepto de área a regiones mucho más generales que las estudiadas inicialmente.

APLICACIONES DE LA INTEGRAL

Volúmenes de revolución

Ya sabemos cómo calcular áreas mediante integrales.

Pero muchas veces una región plana puede utilizarse para construir un objeto tridimensional.

¿Cómo podemos calcular el volumen de ese sólido?

Supongamos que la región bajo una curva $y=f(x)$ gira alrededor del eje x.

Al rotar, cada sección transversal genera un disco cuyo radio es $f(x)$.

Como el área de un disco es

$$
\pi r^2
$$

cada sección aporta aproximadamente

$$
\pi [f(x)]^2\,dx
$$

al volumen total.

Acumulando todas estas contribuciones obtenemos

$$
V=\pi\int_a^b [f(x)]^2\,dx.
$$

La integral permite acumular áreas de secciones transversales para construir un volumen.

https://www.geogebra.org/classic/q3tjpkrx?embed

Actividad:

- ¿Qué relación observas entre la curva de la izquierda y el sólido de la derecha?
- ¿Por qué aparece el cuadrado de \(f(x)\)?
- ¿Qué ocurre con el volumen si la función aumenta?
- ¿En qué se diferencia calcular un área y calcular un volumen?

La integral permite construir volúmenes a partir de regiones planas mediante un proceso de acumulación.

Esta idea muestra cómo una función puede describir no solo una curva, sino también la forma y el tamaño de objetos tridimensionales.

APLICACIONES DE LA INTEGRAL

Valor promedio de una función

Cuando calculamos el promedio de varias cantidades, sumamos todos los valores y dividimos entre el número de observaciones.

Pero ¿cómo podemos calcular el valor promedio de una función en un intervalo continuo?

Si $f(x)$ representa una cantidad que varía continuamente entre a y b, el valor promedio se define como

$$
f_{\text{prom}}=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.
$$

La integral calcula el área bajo la curva.

Al dividir entre la longitud del intervalo, obtenemos una altura constante que produce la misma área total.

https://www.geogebra.org/classic/q5jnkkn4?embed

Actividad:

- ¿Qué representa la altura del rectángulo?
- ¿Por qué el rectángulo y la región sombreada tienen la misma área?
- ¿Qué ocurre con el valor promedio cuando cambia la función?
- ¿En qué se diferencia el valor promedio de una función del promedio de una lista de números?

El valor promedio de una función puede interpretarse como una altura constante que produce la misma área total que la función original en un intervalo dado.

Esta idea conecta la acumulación descrita por la integral con una medida representativa del comportamiento global de la función.

APLICACIONES DE LA INTEGRAL

Longitud de arco

Cuando una función representa una trayectoria o un camino, puede ser útil conocer su longitud.

Por ejemplo, podríamos preguntarnos cuál es la distancia recorrida por un objeto que sigue una trayectoria curva o cuánto mide el borde de una región.

¿Cómo podemos calcular la longitud de una curva?

Podemos aproximar una curva mediante pequeños segmentos rectos.

Si dos puntos consecutivos de la curva tienen coordenadas

$$
(x,f(x))
$$

y

$$
(x+dx,f(x)+df),
$$

la longitud de ese pequeño segmento se obtiene usando el teorema de Pitágoras:

$$
ds=\sqrt{dx^2+df^2}.
$$

Factorizando dx, obtenemos

$$
ds=\sqrt{1+\left(\frac{df}{dx}\right)^2}\,dx.
$$

Al acumular todos estos pequeños segmentos a lo largo del intervalo $[a,b]$, obtenemos la longitud total:

La derivada mide qué tan inclinada es la curva en cada punto.

Cuando la pendiente aumenta, la longitud de cada pequeño segmento también aumenta.

La fórmula de longitud de arco acumula estas pequeñas distancias para obtener la longitud total de la trayectoria.

https://www.geogebra.org/classic/v2xxvp8k?embed

Actividad:

- ¿Qué ocurre con la aproximación cuando aumenta el número de segmentos?
- ¿Por qué una curva puede aproximarse mediante segmentos rectos?
- ¿Qué papel desempeña la pendiente de la función en la longitud total?
- ¿Por qué la fórmula contiene la expresión $\sqrt{1+[f'(x)]^2}$?

La longitud de arco puede interpretarse como la acumulación de pequeñas distancias a lo largo de una trayectoria.

Esta aplicación muestra cómo la integral permite medir no solo áreas y volúmenes, sino también la longitud de objetos curvos.