

SERIES DE TAYLOR Y APROXIMACIÓN

En este capítulo veremos cómo aproximar funciones complicadas usando polinomios.

A partir de la información local de una función, como sus derivadas en un punto, construiremos aproximaciones cada vez más precisas.

Estas ideas permiten describir funciones complejas mediante expresiones más simples y son fundamentales en matemáticas, física, economía e ingeniería.

- [¿Cómo aproximar una función?](#)
- [Polinomio de Taylor](#)
- [Error en la aproximación](#)

¿Cómo aproximar una función?

Muchas funciones son complicadas de calcular exactamente.

Sin embargo, cerca de un punto, su comportamiento puede parecerse mucho al de un polinomio.

Ya vimos que la recta tangente aproxima una función cerca de un punto.

Pero una recta solo captura parte del comportamiento.

¿Qué ocurre si usamos polinomios de mayor grado?

Observa cómo cambia la aproximación al modificar el grado del polinomio y el punto de interés.

<https://www.geogebra.org/classic/xpsep4np?embed>

Al aumentar el grado del polinomio, la aproximación mejora cerca del punto elegido.

En algunos casos, un polinomio puede reproducir el comportamiento de la función de manera sorprendente.

Actividad:

Observa el applet y responde:

- ¿Qué ocurre al aumentar el grado del polinomio?
- ¿En qué región la aproximación es mejor?
- ¿Qué pasa al alejarse del punto (x_0) ?
- ¿Todas las funciones parecen aproximarse igual de bien?

Las derivadas no solo describen cómo cambia una función; también permiten construir a **proximaciones polinomiales** capaces de imitar su comportamiento local.

Polinomio de Taylor

La idea detrás de las aproximaciones anteriores es construir un polinomio que comparta cada vez más información con la función original en un punto.

El polinomio de Taylor utiliza los valores de la función y de sus derivadas para construir una aproximación local.

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

Interpretación:

Cada término del polinomio incorpora información sobre cómo cambia la función:

- el valor de la función
- su pendiente
- su curvatura
- y cambios de orden superior

Ejemplo:

El polinomio de Taylor de orden (2) para (e^x) alrededor de $(x_0=0)$ es:

$$(1 + x + \frac{x^2}{2})$$

Caso particular: Polinomio de Maclaurin

Cuando el punto de expansión es $(x_0=0)$, el polinomio recibe el nombre de polinomio de Maclaurin.

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

Observa cómo cambia la aproximación al modificar el grado del polinomio y el punto de expansión (x_0) .

<https://www.geogebra.org/classic/zksznvu?embed>

Actividad:

Observa el applet y responde:

- ¿Qué información de la función utiliza el polinomio?

- ¿Qué ocurre al aumentar el grado (n) ?
- ¿Por qué la aproximación funciona mejor cerca de (x_0) ?
- ¿Qué cambia cuando $(x_0=0)$?

Los polinomios de Taylor permiten aproximar funciones complejas usando únicamente información local obtenida a partir de derivadas.

Error en la aproximación

Un polinomio de Taylor no siempre coincide exactamente con la función original.

La diferencia entre ambos se conoce como error de aproximación.

En general, el error:

- disminuye al aumentar el grado del polinomio
- y es menor cerca del punto de expansión (x_0) .

Idea conceptual:

La diferencia entre la función y el polinomio aproximante se conoce como error de aproximación.

$$E_n(x) = f(x) - P_n(x)$$

Observa cómo la diferencia entre la función y el polinomio aproximante cambia al aumentar el grado.

<https://www.geogebra.org/classic/gwjkgk45?embed>

Actividad:

Observa el applet y responde:

- ¿Qué ocurre con la aproximación cuando $(n=1)$?
- ¿Cómo cambia el error al aumentar el grado a $(n=5)$?
- ¿En qué regiones la aproximación parece ser mejor?
- ¿Qué ocurre al alejarnos de $(x=0)$?
- ¿El error desaparece completamente?

Estimación del error:

El applet muestra que la aproximación mejora cerca de (x_0) y al aumentar el grado del polinomio.

Pero surge una pregunta natural:

¿podemos estimar matemáticamente qué tan grande es el error?

El error puede estimarse mediante la fórmula de Lagrange:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}$$

para algún valor c entre x y x_0 .

Esta expresión muestra que el error depende de varios factores:

- la distancia al punto de expansión
- el grado del polinomio
- y el comportamiento de derivadas de orden superior.

Los polinomios de Taylor permiten aproximar funciones complejas utilizando información local obtenida a partir de derivadas. La fórmula del error ayuda a entender qué tan precisa es esa aproximación.