

MÉTODOS BÁSICOS DE INTEGRACIÓN

Aunque derivar una función suele seguir reglas relativamente sistemáticas, integrar puede ser considerablemente más desafiante.

Muchos métodos de integración pueden entenderse como procesos inversos de reglas de derivación ya conocidas.

En este capítulo estudiaremos dos de los métodos más importantes:

- la sustitución, relacionada con la regla de la cadena
- la integración por partes, relacionada con la regla del producto
- [Sustitución](#)
- [Integración por partes](#)
- [Más allá de los métodos básicos](#)

Sustitución

La regla de la cadena permite derivar composiciones de funciones.

El método de sustitución surge al intentar deshacer ese proceso.

El método de sustitución consiste en reemplazar una expresión complicada por una nueva variable más simple.

La relación entre ambos procesos puede resumirse esquemáticamente como:

$$\begin{array}{c} \backslash(\\ (f(g(x)))' \\ \backslash;\leftrightharpoons\backslash; \\ \backslash\text{sustitución} \\ \backslash) \end{array}$$

La sustitución puede interpretarse como una manera de “deshacer” la regla de la cadena.

Ejemplo:

$$\backslash(\\ \int 2x(x^2+1)^3, dx \\ \backslash)$$

Aquí

$$\backslash(\\ u=x^2+1 \\ \backslash)$$

Entonces:

$$\backslash(\\ du=2x, dx \\ \backslash)$$

La integral se transforma en:

$$\backslash(\\ \int u^3, du \\ \backslash)$$

Actividad:

- ¿Qué expresión parece conveniente sustituir por una nueva variable?
- ¿Por qué aparece naturalmente el término $\sqrt{2x}$?
- ¿Cómo se relaciona este método con la regla de la cadena?

El método de sustitución simplifica integrales al reconocer estructuras provenientes de composiciones de funciones.

Integración por partes

La integración por partes surge al reorganizar la regla del producto.

Recordatorio:

$$\backslash (fg)' = f'g + fg' \quad \backslash$$

Idea principal:

Si integramos la regla del producto:

$$fg = \int f'g \, dx + \int fg' \, dx$$

Despejando una de las integrales:

$$\int f'g' = fg - \int fg'$$

Así:

Fórmula de Integración por partes:

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

$$\left(fg \right)'$$

\text{integración por partes}

Ejemplo:

$$\int x^2(x+1) dx$$

$$\backslash \quad u=x \quad \backslash \text{qqquad}$$

$$dv=(x+1)dx$$

\)

\(

$$du=2dx$$

\quad

$$v=\frac{(x+1)^2}{2}$$

\)

En algunos casos, una integral puede resolverse mediante distintos métodos. Elegir un método adecuado suele depender de reconocer la estructura de la integral.

La integración por partes resulta especialmente útil cuando aparece un producto de funciones cuya derivada o antiderivada simplifica la expresión.

A diferencia de la derivación, integrar suele requerir reconocer patrones y elegir estrategias adecuadas.

Más allá de los métodos básicos

A diferencia de muchas derivadas, las integrales pueden ser considerablemente más difíciles de calcular.

Existen numerosos métodos de integración y, en muchos casos, no es posible expresar una integral mediante funciones elementales.

De hecho, algunas integrales importantes deben aproximarse numéricamente.

Resolver integrales suele requerir reconocer patrones, probar estrategias distintas y, en ocasiones, aceptar que no existe un camino inmediato hacia la solución.

El estudio de las integrales ha impulsado durante siglos el desarrollo de nuevas ideas matemáticas.

Integrar no siempre consiste en aplicar una receta: muchas veces **implica explorar, reorganizar ideas y construir aproximaciones.**