

LÍMITES

En este capítulo estudiaremos el concepto de límite como una herramienta para entender qué ocurre cuando una variable se aproxima a un valor. Exploraremos la idea de aproximación, los límites laterales, la continuidad y el comportamiento de las funciones cerca de puntos especiales y en el infinito.

- [Motivación: paradoja de Zenón](#)
- [Acercarse a un valor: noción de límite](#)
- [Límites Laterales](#)
- [Límites al infinito](#)
- [Continuidad](#)
- [Discontinuidades](#)

Motivación: paradoja de Zenón

Desde la antigüedad, filósofos y matemáticos se han preguntado qué significa acercarse a un valor sin necesariamente alcanzarlo.

Las paradojas de Zenón muestran que un proceso puede dividirse infinitamente y aun así describir un resultado finito.

Imagina que quieres llegar a un punto, pero antes debes recorrer la mitad del camino. Después, la mitad de lo que falta. Luego otra mitad... y así sucesivamente.

Parece que siempre queda algo por recorrer. Sin embargo, en la práctica sí llegamos.

Esta pregunta: *¿cómo puede un proceso infinito describir un resultado finito?* es una de las ideas que da origen al concepto de límite.

Actividad:

Explora el siguiente applet que ilustra la paradoja de Zenón:

<https://www.geogebra.org/material/iframe/id/afd2jt7a/width/900/height/500/border/888888/sfsb/true/smb/false/stb/false/stbh/false/ai/false/asb/false/sri/true/rc/false/ld/false/sdz/true/ctl/false>

- ¿Crees que el punto llega realmente al destino?
- Si el punto recorre cada vez la mitad de la distancia restante, ¿qué ocurre con la distancia que falta por recorrer?
- Si hay infinitos pasos, ¿significa que el proceso no puede terminar?
- Observa la “distancia recorrida”.
 - ¿Se vuelve exactamente 1 en algún momento?
 - ¿Se hace cada vez más cercana a 1?
- ¿Necesitamos completar todos los pasos para describir el resultado?
- ¿Qué significa “acercarse” en matemáticas?

El concepto de límite surge precisamente para describir este tipo de situaciones: cuando algo se aproxima cada vez más a un valor, aunque la aproximación pueda imaginarse como infinita.

Para seguir explorando

La paradoja de Zenón ha sido discutida durante más de dos mil años.

Si te interesa ver cómo estas ideas se conectan con el desarrollo del cálculo moderno, puedes explorar el siguiente video:

No necesitas dominar todos los conceptos que aparecen ahí.

Lo importante es notar cómo una idea filosófica llevó al desarrollo de nuevas herramientas matemáticas:

<https://www.youtube.com/embed/8czCAZGqLes>

Acercarse a un valor: noción de límite

En la paradoja de Zenón vimos que un proceso puede acercarse cada vez más a un resultado sin necesidad de “completar” todos los pasos.

En matemáticas, esta idea aparece cuando estudiamos funciones.

Muchas veces no nos interesa únicamente el valor de una función en un punto, sino **qué ocurre cuando la variable se aproxima a ese punto**.

Por ejemplo, podemos preguntarnos:

- ¿Qué valores toma la función cuando x está cerca de 1?
- ¿La gráfica se acerca a un valor específico?
- ¿Importa desde qué lado nos acercamos?

Para describir esta idea utilizamos el concepto de límite.

Decimos que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

representa el valor al que se aproxima la función $f(x)$ cuando x se acerca a a , aunque la función no necesariamente tome ese valor.

Actividad:

En la gráfica podemos observar qué ocurre cuando x se acerca al punto indicado sin tomar exactamente ese valor.

Explora el applet y analiza la aproximación desde distintos lados.

<https://www.geogebra.org/classic/smkevst5?embed>

- ¿Qué valores toma la función cuando x está cerca de 1?
- ¿Parece que la función se acerca a un valor específico?
- ¿Importa si la aproximación se hace por la izquierda o por la derecha?

- ¿Necesitamos evaluar la función exactamente en el punto para describir lo que ocurre cerca?
- ¿El valor al que se aproxima la función coincide necesariamente con $f(1)$?

El concepto de límite permite describir matemáticamente esta idea de aproximación: estudiar qué ocurre cerca de un punto, incluso cuando la función no está definida en él.

Límites Laterales

En ocasiones no basta con decir que una variable se acerca a un valor. También importa **desde qué lado** se aproxima.

Podemos acercarnos a un número a de dos maneras:

- por valores menores que a es decir, **por la izquierda**;
- por valores mayores que a , es decir, **por la derecha**.

Esta distinción da lugar a los **límites laterales**.

Decimos que

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$$

representa el valor al que se aproxima la función cuando x se acerca a a **por la izquierda**.

De manera similar,

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

representa el valor al que se aproxima la función cuando x se acerca a a **por la derecha**.

Un **límite existe** cuando los valores a los que se aproxima la función desde la izquierda y desde la derecha coinciden.

$$\text{El } \lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ existe si } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$$

Actividad

Observa el siguiente ejemplo:

$$f(x) = \frac{2x^2 - 7x + 3}{|x - 3|}$$

Explora el applet y analiza qué ocurre cuando x se aproxima a 3 por ambos lados.

<https://www.geogebra.org/classic/mc6s2hv4?embed>

Preguntas para pensar

- ¿Qué valores toma la función cuando x se acerca a 3 por la izquierda?

- ¿Qué valores toma cuando x se acerca a 3 por la derecha?
- ¿Parece que la función se aproxima al mismo valor en ambos casos?
- Si los valores a los que se acerca son distintos, ¿podemos decir que existe un único límite?
- ¿Puede existir un límite lateral aunque el límite completo no exista?

En este ejemplo, la aproximación por la izquierda y por la derecha no conduce al mismo valor. Decimos entonces que los límites laterales son distintos:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -5 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 5$$

Como estos valores no coinciden, el límite de la función cuando $x \rightarrow 3$ **no existe**.

Idea importante

Para que exista el límite de una función en un punto, es necesario que la función se aproxime **al mismo valor** desde ambos lados.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ existe} \quad \text{si y solo si} \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

Límites al infinito

Hasta ahora hemos estudiado lo que ocurre cuando x se acerca a un número específico. Pero también podemos preguntarnos: ¿qué pasa cuando x crece cada vez más? ¿Cómo se comporta una función cuando la variable se vuelve muy grande?

Esto se describe mediante los **límites al infinito**.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$$

Esta expresión no significa que x “llegue” al infinito, sino que x crece sin límite. Lo que nos interesa es observar qué ocurre con los valores de la función.

Actividad 1:

Consideremos la función

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Si hacemos una tabla de valores, obtenemos:

x	$f(x)$
1	1
10	0.1
100	0.01
1000	0.001

Observamos que, conforme x crece sin límite, los valores de la función se acercan cada vez más a 0. En símbolos:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

Los límites al infinito describen el comportamiento de una función cuando la variable crece sin límite.

Observa qué ocurre con la gráfica de $f(x) = 1/x$ cuando x toma valores cada vez más grandes.

<https://www.geogebra.org/classic/bhwwmmbb?embed>

- ¿Qué ocurre con los valores de la función cuando x aumenta cada vez más?
- ¿A qué valor parece acercarse la función?

En algunos casos, una función se aproxima a un número fijo cuando x crece sin límite. Cuando eso ocurre, la recta horizontal

$$y=L$$

se llama **asíntota horizontal**.

Es decir, si

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)=L$$

entonces la gráfica de la función se acerca cada vez más a la recta $(y=L)$ cuando avanzamos hacia la derecha.

Actividad 2:

Distintas funciones pueden aproximarse a distintas rectas horizontales.

Explora en el siguiente applet cómo cambia la asíntota horizontal para **3** diferentes funciones:

- $(n=1)$, $f(x)=\frac{1}{x}$
- $(n=2)$, $f(x)=\frac{2x+1}{x}$
- $(n=3)$, $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2}$

<https://www.geogebra.org/classic/fbtzrwct?embed>

- ¿Qué recta parece describir el comportamiento de la función cuando $f(x)$ crece mucho?
- ¿Cómo se relaciona esa recta con el límite de la función?

Actividad 3

Para entender por qué aparece este comportamiento, analicemos la función algebraicamente.

Consideremos:

$$f(x)=\frac{2x+1}{x}$$

Podemos reescribirla como

$$f(x)=2+\frac{1}{x}$$

Como ya sabemos que $\frac{1}{x} \rightarrow 0$ cuando $(x \rightarrow \infty)$, se sigue que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+1}{x}=2$$

Por lo tanto, la recta

$$y=2$$

es una asíntota horizontal de la función.

Preguntas para reflexionar

- Si una función se acerca cada vez más a un número, ¿significa que necesariamente lo alcanza?
- ¿Puede una función tener dos asíntotas horizontales distintas?
- ¿Qué cambia cuando analizamos el comportamiento de la función cuando $x \rightarrow -\infty$?
- ¿Puede una función acercarse a un valor sin llegar nunca exactamente a él?

En resumen, los límites permiten describir el comportamiento de una función cuando la variable se aproxima a un valor o crece sin límite. En muchos casos, este comportamiento se resume mediante rectas llamadas asíntotas.

Continuidad

Imagina que recorres la gráfica de una función con la punta de un lápiz. Si puedes dibujarla sin levantar el lápiz del papel, decimos que la función es **continua**.

Una función es continua en un punto si su gráfica no presenta saltos, huecos ni interrupciones en ese punto.

Matemáticamente, esto significa que cuando x se acerca a un punto a , los valores de la función se acercan al valor de la función en ese punto.

Decimos que f es continua en a si:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Es decir, cuando el valor de la función coincide con el valor al que se aproxima la gráfica cuando x se acerca a ese punto.

De manera más precisa, una función $f(x)$ es continua en $x=a$ si se cumplen las siguientes tres condiciones:

1. $f(a)$ Existe
2. $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ Existe
3. Ambos valores coinciden

Actividad

En la definición de continuidad intervienen dos elementos: el **valor de la función en el punto** y el **límite de la función cuando nos acercamos a ese punto**.

En el siguiente applet podemos observar cómo estos dos valores se comportan cuando x se acerca a a .

Mueve los deslizadores y observa qué ocurre con el límite y con el valor de la función.

<https://www.geogebra.org/classic/sf75nzdhd?embed>

- Mueve el punto a a lo largo de la gráfica.
¿Qué ocurre con los valores de la función cuando x se acerca a a ?
- Compara el valor del límite $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ con el valor de $f(a)$
¿Qué relación observas entre ellos?
- ¿Se cumplen siempre las tres condiciones de continuidad en este ejemplo?

- ¿Qué ocurriría si el valor de la función en ese punto fuera distinto del valor al que se aproxima la gráfica?

Cuando alguna de estas condiciones falla, aparece una discontinuidad.

Discontinuidades

En la sección anterior vimos que una función es continua en (a) cuando se cumplen tres condiciones:

1. $f(a)$ Existe
2. $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ Existe
3. Ambos valores coinciden

Cuando alguna de estas condiciones falla, aparece una **discontinuidad**.

Existen distintas formas en que puede romperse la continuidad.

Tipo	Qué ocurre
Removable	el límite existe pero $f(a)$ es distinto o no está definido
Salto	los límites laterales son distintos
Infinita	la función crece sin límite

Actividad:

Explora el siguiente applet y cambia el tipo de discontinuidad utilizando el deslizador. Observa lo que ocurre en el punto $(x=1)$.

<https://www.geogebra.org/classic/gwkruwph?embed>

Preguntas:

- ¿Existe el valor de la función $f(1)$?
- ¿Existe el límite $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$?
- ¿Coinciden ambos valores?
- ¿Cuál de las tres condiciones de continuidad deja de cumplirse en cada caso?, ¿Cómo se ve esa falla en la gráfica de la función?

Las discontinuidades aparecen cuando alguna de las condiciones de continuidad deja de cumplirse. Analizar qué ocurre con el límite y con el valor de la función en un punto nos permite entender la forma en que la gráfica “se rompe”.

En algunos casos, como en la discontinuidad infinita, los valores de la función crecen sin límite al acercarnos a un punto. Cuando esto ocurre, la recta vertical

$$(x=a)$$

se llama **asíntota vertical** de la función; escribimos:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm \infty$$

Así, el estudio de los límites no solo permite describir el comportamiento de una función cerca de un punto, sino también entender la estructura global de su gráfica.

Los límites describen cómo se comporta una función cuando la variable se aproxima a un valor o crece sin límite.

Cuando el valor de la función coincide con ese comportamiento, la función es continua.

Cuando alguna de estas condiciones falla, aparece una discontinuidad.