

LA INTEGRAL

Hasta ahora hemos utilizado la derivada para describir cómo cambian las funciones.

La integral surge de una idea distinta: acumular cantidades pequeñas para aproximar un valor total.

A lo largo de este capítulo veremos cómo aproximar áreas, construir sumas de Riemann y definir la integral como un proceso de acumulación.

Finalmente, descubriremos la relación entre derivadas e integrales mediante el Teorema Fundamental del Cálculo.

- [¿Cómo reconstruir una cantidad?](#)
- [Sumas de Riemann](#)
- [La integral definida](#)
- [El Teorema Fundamental del Cálculo](#)
- [Antiderivadas e integrales indefinidas](#)

¿Cómo reconstruir una cantidad?

En el estudio de derivadas, partimos de una posición para entender cómo cambia una cantidad.

En integración ocurre lo contrario: conocemos pequeños cambios y buscamos reconstruir la cantidad total acumulada.

Por ejemplo, si conocemos la velocidad de un objeto en cada instante, ¿podemos determinar la distancia total recorrida?

Una forma de aproximar esta acumulación consiste en dividir el intervalo en partes pequeñas y usar rectángulos.

<https://www.geogebra.org/classic/u7utbrp4?embed>

Actividad:

Observa el applet y responde:

- ¿Qué ocurre al aumentar el número de particiones?
- ¿Cómo cambia la aproximación?
- ¿Los rectángulos parecen aproximar mejor la región al aumentar n ?
- ¿Crees que la aproximación podría acercarse a un valor exacto?

La integral surge de la idea de acumular pequeños cambios para reconstruir una cantidad total.

Sumas de Riemann

En la página anterior aproximamos una cantidad acumulada utilizando rectángulos.

Ahora daremos nombre y estructura matemática a esa idea.

Una suma de Riemann aproxima una acumulación dividiendo un intervalo en partes pequeñas y sumando áreas de rectángulos.

La altura de cada rectángulo se obtiene evaluando la función en un punto del subintervalo.

Dependiendo del punto elegido, pueden obtenerse aproximaciones distintas.

<https://www.geogebra.org/classic/td7yxuwm?embed>

Notación:

Si dividimos el intervalo $[a,b]$ en (n) partes y usamos un punto de muestra (y_i) en cada subintervalo, la suma de Riemann puede escribirse como:

$$\sum_{i=1}^n f(y_i) \Delta x$$

donde

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

Actividad:

Observa el applet y responde:

- ¿Cómo cambia la aproximación al mover el parámetro (t) ?
- ¿Qué ocurre cuando se usan más particiones?
- ¿Las aproximaciones obtenidas parecen acercarse a un mismo valor?
- ¿Por qué distintos puntos de muestra producen resultados distintos?
- ¿Qué crees que ocurriría si el número de particiones creciera indefinidamente?

Las sumas de Riemann permiten aproximar cantidades acumuladas mediante sumas finitas.

La integral surgirá al considerar el límite de estas aproximaciones cuando el número de particiones aumenta indefinidamente.

La integral definida

En las sumas de Riemann aproximamos una cantidad acumulada usando un número finito de rectángulos.

Pero, ¿qué ocurre si aumentamos indefinidamente el número de particiones?

Cuando el ancho de los subintervalos se hace cada vez más pequeño, las aproximaciones pueden acercarse a un valor límite.

Ese valor se define como la integral definida de la función en el intervalo $[a, b]$

Definición:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(y_i) \Delta x$$

Interpretación:

La integral definida representa una cantidad acumulada obtenida a partir de infinitas aproximaciones cada vez más precisas.

<https://www.geogebra.org/classic/hctg3hwz?embed>

Actividad:

Observa el applet y responde:

- ¿Qué ocurre con la suma de Riemann cuando n aumenta?
- ¿Las aproximaciones obtenidas con distintos valores de t parecen acercarse al mismo número?
- ¿Qué representa el valor límite de estas aproximaciones?
- ¿Por qué la integral puede interpretarse como una acumulación?

La integral definida surge como el límite de sumas de Riemann.

Esta construcción permite describir acumulaciones continuas mediante funciones.

El Teorema Fundamental del Cálculo

La derivada estudia cómo cambia una cantidad.

La integral acumula pequeños cambios.

¿Existe una conexión entre ambas ideas?

Supongamos que definimos:

$$A(x) = \int_a^x f(t) dt$$

donde $A(x)$ representa la cantidad acumulada desde a hasta x .

Al mover x , el área cambia.

Pero, ¿a qué razón cambia?

Observa el siguiente applet:

<https://www.geogebra.org/classic/kewwmw4s?embed>

Teorema Fundamental del Cálculo (Acumulación y derivada):

El Teorema Fundamental del Cálculo afirma que:

$$A'(x) = f(x)$$

Es decir:

la derivada de la acumulación recupera la función original.

Teorema Fundamental del Cálculo (Evaluación de integrales):

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

donde

$$F'(x) = f(x)$$

El cálculo diferencial y el cálculo integral no son ideas separadas: **son procesos inversos.**

Actividad:

Reflexiona y responde:

- ¿Cómo se relacionan las ideas de cambio y acumulación?
- ¿Por qué el Teorema Fundamental del Cálculo conecta derivadas e integrales?
- ¿Qué representa la función $A(x)$?
- ¿Qué significa que $A'(x)=f(x)$?

El Teorema Fundamental del Cálculo unifica las dos ideas centrales del cálculo: cambio y acumulación.

Antiderivadas e integrales indefinidas

Distintas funciones pueden tener exactamente la misma derivada.

Por ejemplo, todas las funciones de la forma:

$$(x^2 + C)$$

tienen derivada:

$$(2x)$$

Una **antiderivada** de $f(x)$ es una función cuya derivada es $f(x)$, es decir: $F'(x)=f(x)$

Como las constantes desaparecen al derivar, una función suele tener infinitas antiderivadas.

<https://www.geogebra.org/classic/ngvtngk3?embed>

Definición:

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

Una **condición inicial** permite seleccionar una función específica dentro de la familia de antiderivadas.

Actividad:

- ¿Qué efecto tiene cambiar C ?
- ¿Las funciones cambian su derivada?
- ¿Por qué aparece la constante de integración?
- ¿Cómo puede una condición inicial determinar una única solución?

La integral indefinida representa una familia de funciones con la misma derivada.

La constante de integración refleja que derivar elimina información sobre desplazamientos verticales.