FUNCIONES Y GRÁFICAS

En este capítulo estudiaremos el concepto de función como una herramienta para describir relaciones entre variables. Analizaremos sus distintas formas de representación (algebraica, gráfica y tabular) y aprenderemos a interpretar geométricamente cómo cambian las gráficas al modificar sus parámetros.

- Funciones: idea y representaciones
- Funciones reales y gráficas en el plano
- Transformaciones
- Otras funciones importantes

Funciones: idea y representaciones

Antes de que aparezcan fórmulas y gráficas, piensa en esto:

Cada vez que revisas el clima, cada vez que ves el precio del dólar, cada vez que Spotify te recomienda una canción o cuando ves cómo cambian las calorías que quemas al correr más rápido, estás usando funciones.

Una función no es primero una fórmula, es una manera de decir: "a cada país le corresponde una población", "a cada palabra le corresponde una longitud", "a cada año le corresponde un precio promedio de audífonos". Las funciones son la forma matemática de capturar estas relaciones.

DEFINICIÓN

Una función f es una regla que asigna a cada elemento de un conjunto X **exactamente** un elemento de un conjunto Y.

Esta función se denota como $f: X \to Y$

El conjunto X se llama dominio y el conjunto Y se llama codominio.

La imagen de un elemento $x \in X$ es el valor $y=f(x) \in Y$ en el codominio.

Al conjunto de todos los valores posibles de la función se le llama *rango* o *imagen* de f.

Notación: $f(X)=\{f(x)| x \in X\} \subseteq Y$

REPRESENTACIONES DE FUNCIONES

Existen varias formas de definir funciones. A continuación se muestran algunas y se proponen preguntas de reflexión.

Tabla de valores:

Una función puede definirse mediante una tabla. En este ejemplo vamos a representar una función f que asigna a un país su población:

x	$f(x)$
México	133 millones
Estados Unidos	349 millones
Canadá	41 millones
Brasil	213 millones
Argentina	47 millones
Chile	20 millones
Perú	34 millones
...	...

Preguntas:

Sobre las entradas y salidas:

- ¿Qué tipo de objetos son las entradas de esta función: números, palabras, países, categorías...?
- ¿Cuáles son las "salidas de esta función?
- ¿Tiene sentido que la salida sea cualquier número real, como 3.7 o -12?

Sobre dominio, codominio y definición:

- ¿Todos los países del mundo podrían aparecer como entrada de esta función? ¿Por qué sí o por qué no?
- ¿Qué pasaría si alguien intenta evaluar la función en “España” si no está en la tabla? ¿La función deja de existir o simplemente no está definida ahí?
- ¿El dominio es finito o infinito? ¿Cómo lo sabes?
- ¿Podría el codominio ser "todos los números reales"?

Sobre propiedades de las funciones:

- ¿Crees que dos países distintos podrían tener exactamente la misma población?,
- si esto pasa, ¿seguiría siendo una función?
- ¿Qué ventajas tiene pensar esta tabla como una función y no solo como una lista de datos?

Algoritmo:

Una función puede definirse mediante un algoritmo. Ejemplo: una función f que asigna a una cadena su longitud:

- $f(sal) = 3$
- $f(mar) = 3$
- $f(límite) = 6$

- $f(paralelogramo) = 13$
- $f(cálculo) = 7$

Preguntas:

Sobre el dominio:

- ¿Qué tipo de objetos son ahora las entradas de la función?
- ¿Qué tienen en común todos los elementos del dominio?
- ¿Podría esta función aplicarse a cualquier palabra del español?
- ¿Y a palabras en otros idiomas?
- ¿Y a símbolos como “$$$” o “123”?

Sobre las salidas:

- ¿Qué tipo de objeto es la salida de la función?
- ¿Puede la función tomar el valor 0?
- ¿Para qué entrada?

Sobre qué significa ser función:

- ¿Crees que dos palabras distintas pueden tener la misma imagen?
  Pon ejemplos.
- ¿Podría una misma palabra tener dos valores distintos?
  ¿Qué pasaría si eso ocurriera?
- ¿En qué sentido sigue siendo una función, aunque no haya fórmulas?

Gráfica:

Una función puede definirse mediante su gráfica. Ejemplo: el precio de un par de audífonos en el tiempo

https://www.geogebra.org/classic/dh5zxnxx?embed

Preguntas:

Interpretación básica:

- ¿Qué representa el eje horizontal en esta gráfica?
- ¿Qué significa un punto como (2015, 2300)?

Sobre el dominio y el tipo de función:

- ¿Por qué no tiene sentido evaluar la función en 2015.3?
- ¿Esta función es continua o discreta? ¿Por qué?

Sobre el modelo y la realidad:

- ¿Tiene sentido que el precio sea negativo?
- ¿Tiene sentido que sea 12 pesos?
- ¿Qué rango de valores es razonable para este fenómeno?
- ¿Esta gráfica describe una ley matemática exacta o una aproximación de la realidad?

También podemos crear una función a partir del esbozo de su gráfica.

https://www.geogebra.org/classic/a2xkvsg8?embed

Preguntas:

Lectura de gráfica:

- ¿En qué intervalos la función crece?
- ¿En qué intervalos decrece?
- ¿Dónde parece haber un máximo local?
- ¿Hay algún tramo donde la función sea casi constante?

Interpretación:

- ¿Qué fenómeno real podría tener esta forma?
- ¿Qué historia cuenta esta gráfica?
- ¿Qué podría representar el eje horizontal?
- ¿Qué podría representar el eje vertical?

Construcción de función:

- ¿Crees que existe una fórmula “bonita” que la genere exactamente?
- Si no, ¿qué tipo de funciones usarías para aproximarla?
- ¿Una función por partes tendría sentido aquí?

Funciones explícitas:

Una función explícita se define mediante una expresión algebraica. Por ejemplo $f(x)=x^2$ asigna a un número su cuadrado. En cálculo, trabajaremos principalmente con funciones explícitas.

Funciones reales y gráficas en el plano

A cada tipo de función le corresponde una forma característica. En esta sección estudiaremos distintos tipos de funciones a través de sus gráficas, enfocándonos en cómo la regla que define a la función se refleja en su gráfica.

Estudiaremos funciones reales: $X \subseteq \mathbb{R}$ y $Y \subseteq \mathbb{R}$. La función se denota $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

La notación $f(x)$ se lee como "f de x". Si $f(x)=x^2$ entonces $f(3)=9$, x es la variable independiente y $y=f(x)$ es la variable dependiente.

GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

La gráfica de una función f es el conjunto de todos los puntos $(x, f(x))$ en el plano cartesiano $\mathbb{R}^2$.

Criterio de la vertical: una gráfica corresponde a una función si y solo si cada línea vertical intersecta la gráfica a lo más una vez.

Ejemplos:

1. Funciones lineales: tiene la forma $f(x)=mx + b$. Son las más simples, pero no las menos importantes. Describen crecimiento constante y aparecen en modelos económicos, físicos y sociales.

Abre el applet de geogebra y realiza las siguientes actividades:

- Elige dos valores distintos de m que generen rectas que se crucen en el mismo punto. ¿qué observas sobre ese punto?, ¿de qué depende?
- Encuentra valores de m y b tales que la recta:
    - pase por el origen
    - sea horizontal
    - sea decreciente
    - pase por el punto $(2,3)$

https://www.geogebra.org/classic/pugqzfnr?embed

2. Funciones cuadráticas: tiene la forma $f(x)=ax^2 + bx+c$. Muchas trayectorias en la vida real tienen forma parabólica: el recorrido de un objeto lanzado, el movimiento de una pelota. Usa la gráfica que aparece a continuación y realiza las siguientes actividades:

- Mantén b y c fijos. Cambia lo a
  - ¿Qué permanece igual en todas las parábolas?
  - ¿La parábola se hace más abierta, más cerrada, se voltea?
  - ¿El vértice cambia de lugar?
- Fija a y b, cambia c.
  - ¿Cómo se mueven las parábolas en el plano?
  - ¿La gráfica se desliza, gira, se estira o se voltea?
  - ¿Qué cambia de la gráfica y qué permanece igual?

https://www.geogebra.org/classic/w6a43rrt?embed

Las funciones lineales y cuadráticas que hemos estudiado hasta ahora pertenecen a una misma familia: las **funciones polinomiales.** Estas funciones están definidas para todo número real y sus gráficas no presentan cortes ni saltos.

3. Funciones racionales: forma general: $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$, son el cociente de dos polinomios. En algunas funciones, no todos los valores de una variable están permitidos. Las funciones racionales son un ejemplo importante: su gráfica puede presentar rupturas y asíntotas debido a restricciones en el dominio. Sus gráficas son muy útiles para analizar estos comportamientos.

Primer applet: $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$

https://www.geogebra.org/classic/vxcmjkvs?embed

- Encuentra un valor de x donde la gráfica "se rompa", ¿qué ocurre con el denominador en ese punto?.
- Ajusta los parámetros para que:
  - La gráfica tenga una asíntota vertical en $x=1$
  - No tenga ninguna asíntota vertical, ¿qué condición cumple el denominador en este caso?
- Observa la gráfica cerca de una asíntota vertical
  - ¿qué le pasa a $f(x)$ cuando x se acerca a ese valor por la izquierda y por la derecha?
- Completa la frase: "El parámetro ____ controla principalmente ____, mientras que el parámetro ____ controla ____"

Segundo applet: $f(x)=\frac{ax+b}{(x-r)(x-s)}$

https://www.geogebra.org/classic/srtf7xz9?embed

- Ajusta los parámetros para que:
    - la gráfica tenga dos asíntotas verticales
    - tenga solo una.
- Observa que pasa si $r=s$, ¿cómo cambia la gráfica?
- Observa el comportamiento de la gráfica cerca de cada asíntota, ¿es igual en las dos?

4. Raíces cuadradas: Son de la forma $f(x)=a\sqrt{x-h}$. No todas las funciones empiezan en cualquier punto: las funciones raíz cuadrada tienen un punto inicial que determina su dominio. Estas funciones aparecen de forma natural al describir distancias y longitudes que no pueden ser negativas. Describen fenómenos que sólo existen a partir de cierto instante.

Con el applet de geogebra, realiza las siguientes actividades:

- Mueve h hasta que la gráfica "empiece" exactamente en $x=2$
    - ¿qué valor toma h
    - ¿qué representa ese punto inicial de la gráfica?
- Ajusta a para que la gráfica:
    - sea más "empinada"
    - sea más "aplanada"
    - se refleje hacia abajo, ¿cómo son los valores de a en este caso.
- Fija h y cambia solo a, ¿el dominio cambia?, ¿y el rango?
- Fija a y cambia solo h, ¿qué le pasa al dominio?, ¿qué le pasa al punto donde inicia la gráfica?

https://www.geogebra.org/classic/uwh3y32e?embed

5. Funciones definidas por partes:

5.1. Función piso. La función piso $f(x)=\lfloor x \rfloor$ devuelve el entero más cercano por debajo de x. Es una función que está definida para todo x pero no cambia de manera continua. Un ejemplo de esta función es la edad: cuando alguien pregunta cuántos años tienes, normalmente respondemos un número entero. Aunque hayas cumplido 20 años y 3 meses, la respuesta es que tienes 20 años.

Actividad:

- Describe con tus palabras qué hace esta función, ¿se parece a un redondeo?, ¿hacia dónde?
- Si $x=2.7$, ¿cuánto vale $f(x)$?
- Observa la gráfica en los enteros, ¿qué ocurre en $x=1,2,3,4,...$
- ¿por qué hay círculos cerrados y puntos llenos?
- ¿el dominio tiene restricciones?, ¿el rango qué tipo de números contiene?

https://www.geogebra.org/classic/xua5mgzv?embed

5.2. Ejemplo general de función definida por partes: La regla que define a la función cambia dependiendo del valor de x.

Actividad:

- ¿Cuál es el dominio de la función?, ¿y el rango?
- ¿En qué intervalos la función es constante, creciente, decreciente?
- Mueve el deslizador y completa la tabla:

x_0	Regla que se usa	$f(x_0)$
-1.5		
0		
1.5		
6		

- ¿La gráfica se puede dibujar sin levantar el lápiz?
- En una función definida por partes, ¿qué es más importante: la fórmula o los intervalos donde se aplica?, explica tu respuesta.

https://www.geogebra.org/classic/ag8kqaqt?embed

DOMINIO DE UNA FUNCIÓN

En los ejemplos anteriores vimos que no todas las funciones están definidas para todos los valores de x. A este conjunto de valores permitidos se le llama **dominio** de la función.

Algunas funciones restringen su dominio de forma implícita, entre las restricciones comunes están:

- División por cero: el denominador **nunca** puede ser 0.
- Raíces cuadradas (en funciones reales): el argumento no puede ser negativo.

Ejemplos:

1. $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ no está definida en $x=1$, el dominio es: $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Aunque la expresión se puede simplificar, la función original no está definida en ese punto.
2. $f(x)=a\sqrt{x-h}$ no está definida para $x<h$, el dominio es: $[h,\infty)$

Actividad de cierre: Para cada una de las funciones estudiadas en esta página:

- ¿Está definida para todo x?
- Si no, ¿qué restricción aparece y por qué?
- ¿Cómo se refleja esa restricción en la gráfica?

Transformaciones

Muchas funciones se parecen entre sí: cambian de lugar horizontal o verticalmente, se estiran, se voltean, pero conservan su forma básica.

En esta sección exploraremos cómo una gráfica conocida puede transformarse en muchas otras. Partiremos de una función base y analizaremos qué ocurre al modificar distintos parámetros.

Sea $g(x)=b*f(a(x-h))+k$, los parámetros a, b, h y k modifican la gráfica de f de distintas maneras. Trabajaremos con este applet en cuatro etapas, enfocándonos en un parámetro distinto en cada una.

https://www.geogebra.org/classic/dvphzfn5?embed

Etapa 1: efecto de los parámetros h y k:

Fija $a=1$ y $b=1$

- Mueve el parámetro h, ¿la gráfica se mueve a la izquierda o a la derecha?
- Mueve el parámetro k, ¿qué ocurre verticalmente?, ¿la forma de la gráfica cambia?

Al movimiento que ocurre cuando movemos h se le llama una **translación horizontal**, y al movimiento que ocurre cuando movemos k, una **translación vertical.**

Etapa 2: efecto en el parámetro b:

Fija $h=0$ y $k=0$

- Cambia b, con $b>0$, ¿la gráfica se vuelve más empinada (más empinada=mayor pendiente) o más plana?
- Cambia b, con $b<0$, ¿qué ocurre con la gráfica?

Este tipo de cambio se llama **estiramiento vertical** y cuando $b<0$, como **reflexión vertical.**

Etapa 3: efecto en el parámetro a:

Fija $b=1$, $h=0$ y $k=0$

- Cambia a, ¿la gráfica se "compacta" o se "estira" horizontalmente?
- Compara con lo que ocurre cuando cambias b.
- ¿Por qué cambiar a afecta la gráfica de manera distinta a cambiar b?

Aunque la función original no cambió, su gráfica puede moverse, estirarse o reflejarse al modificar los parámetros. Las transformaciones permiten generar muchas gráficas a partir de una sola función base.

Actividad: Hasta ahora hemos trabajado con una función específica para entender el efecto de cada parámetro. Ahora explora qué ocurre cuando cambias la función base $f(x)$.

Sugerencia de funciones para probar:

- $f(x)=2\sqrt{1-x}$
- $f(x)=\frac{1}{x+3}$
- $f(x)=-x^2+1$
- $f(x)=-4x-3$

Con esas funciones observa:

- ¿qué transformación (o transformaciones) cambian el dominio de la función?
- ¿y el rango?

Otras funciones importantes

En esta sección exploraremos algunas funciones que aparecen con mucha frecuencia en matemáticas y en aplicaciones y cuyas gráficas presentan comportamientos distintos a los que hemos visto hasta ahora.

1. FUNCIÓN VALOR ABSOLUTO

La función valor absoluto aparece cuando solo importa el tamaño del error, la magnitud de una diferencia o qué tan lejos estás de un valor de referencia, sin importar el signo. Por ejemplo, podemos decir "me equivoqué por 2" y es equivalente a equivocarse por -2 o $+2$.

Gráficamente, esto se refleja en que todos los valores negativos se "voltean" hacia arriba.

https://www.geogebra.org/classic/yqw6s4pb?embed

Actividad:

- Mueve el deslizador x_0,
  - ¿qué ocurre con $f(x_0)$ cuando x_0 es negativo?
  - ¿qué ocurre cuando es positivo?
  - ¿Existen dos valores distintos de x que tengan el mismo valor absoluto?, ¿cuáles?
- Compara las gráficas de $y=x$ y $y=|x|$
  - ¿en qué intervalo coinciden?
  - ¿qué parte de la gráfica de $y=x$ ya no aparece en $y=|x|$?
- Supón que el valor correcto de una medición es 2, el error cometido es x y el tamaño del error se mide con $|x|$.
  - Si $x=-2.05$, ¿cuál es el tamaño del error?
  - ¿es mayor el error cuando $x=2.05$ o cuando $x=-2.05$?
  - ¿qué valores de x cumplen que el error sea menor que 1?
- Observa la gráfica:
  - ¿en qué punto cambia la "dirección" de la gráfica?
  - ¿por qué ese punto es epecial?, ¿hay valores de y por debajo de ese punto?

2. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Hay fenómenos que no evolucionan de manera lineal, sino que suben y bajan y se repiten una y otra vez: el día y la noche, las estaciones del año, el ritmo del corazón, las mareas, las ondas de sonido, los ciclos económicos.

Las funciones trigonométricas aparecen cuando queremos describir comportamientos periódicos, es decir, patrones que se repiten regularmente con el tiempo.

https://www.geogebra.org/classic/xbrx64v7?embed

Actividad:

- Mueve el deslizador de θ
  - ¿cómo cambian los valores de $\sin(\theta)$ y $\cos(\theta)$ cuando aumenta θ?
  - ¿los valores de $\sin(\theta)$ y $\cos(\theta)$ crecen siempre, decrecen siempre o hacen ambas cosas?
- Observa las gráficas de $\sin(\theta)$ y $\cos(\theta)$
  - ¿qué patrón se repite una y otra vez?
  - ¿cada cuánto se repite ese patrón?
  - ¿los valores de $\sin(\theta)$ y $\cos(\theta)$ superan algún valor máximo o mínimo?, ¿cuáles son esos valores?
  - Las gráficas ¿tienen la misma forma?
  - ¿tienen alguna transformación como las que analizamos en la página anterior?
  - ¿qué ocurre en valores de θ como 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$
- Activa la opción de **tangente**:
  - ¿qué ocurre con $\tan(\theta)$ cuando θ se acerca a $\frac{\pi}{2}$ o a $\frac{3\pi}{2}$?
  - ¿tiene alguna restricción en su dominio?

3. FUNCIONES INVERSAS

Dada una función f, puede surgir la pregunta inversa: si conocemos el valor de $f(x)$, ¿podemos recuperar el valor de x?

No todas las funciones permiten hacerlo, cuando es posible, la función inversa describe exactamente ese proceso de recuperación.

La gráfica de una función inversa se obtiene intercambiando los roles de entrada y salida. Gráficamente, esto se refleja como una simetría respecto a la recta $y=x$.

Actividad:

https://www.geogebra.org/classic/tu2srjkz?embed

- Observa las gráficas de $f(x)$ y $f^{-1}(x)$
  - ¿qué relación tienen con la recta $y=x$?
- Elige un punto (a,b) en la gráfica de $f(x)$, usando el deslizador
  - ¿qué punto aparece en la gráfica de $f^{-1}(x)$?
  - ¿qué ocurrió con las coordenadas?
  - ¿cómo se mueven los puntos P y Q?, ¿qué relación geométrica mantienen entre sí?
- Observa el dominio y el rango, ¿cómo se relacionan el dominio y el rango de $f(x)$ con los de $f^{-1}(x)$?
- ¿Existe algún punto que pertenezca tanto a la gráfica de $f(x)$ como a la de $f^{-1}(x)$?, ¿qué condición debe cumplir?