

# FUNCIONES FUNDAMENTALES DEL CÁLCULO

Algunas funciones aparecen constantemente en cálculo debido a la manera en que modelan cambio, acumulación y comportamiento periódico.

En este capítulo estudiaremos funciones trigonométricas, logarítmicas y exponenciales desde la perspectiva del cálculo diferencial e integral.

Más que enfocarnos únicamente en sus propiedades algebraicas, exploraremos cómo estas funciones describen fenómenos de crecimiento, oscilación y acumulación, y por qué ocupan un papel central en las matemáticas aplicadas.

- [Funciones Trigonómicas en Cálculo](#)
- [La función logarítmica](#)
- [Una propiedad fundamental del logaritmo](#)
- [La función exponencial](#)
- [Derivadas e integrales](#)

# Funciones Trigonométricas en Cálculo

Muchas funciones en cálculo describen fenómenos que cambian de manera periódica.

Oscilaciones, ondas, vibraciones y movimientos repetitivos aparecen naturalmente en modelos físicos, biológicos y económicos.

Las funciones **seno** y **coseno** son fundamentales porque su comportamiento oscilatorio permite modelar cambios cíclicos.

Además, sus derivadas e integrales conservan la misma estructura trigonométrica, lo que las hace especialmente importantes en cálculo.

## Derivadas básicas:

$$\left(\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x\right)$$

$$\left(\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x\right)$$

## Integrales básicas:

$$\left(\int \cos x \, dx = \sin x + C\right)$$

$$\left(\int \sin x \, dx = -\cos x + C\right)$$

A diferencia de muchas otras funciones, las funciones trigonométricas reaparecen constantemente al derivar e integrar.

Esta propiedad explica por qué son tan útiles para modelar fenómenos periódicos.

<https://www.geogebra.org/classic/cur8gmww?embed>

### Actividad:

- ¿Qué relación observas entre la pendiente de  $\sin\{x\}$  y los valores del  $\cos\{x\}$ ?
- ¿En qué puntos la pendiente de  $\sin\{x\}$  es cero?
- ¿Cuándo la pendiente es positiva o negativa?
- ¿Por qué las funciones trigonométricas son útiles para modelar fenómenos periódicos?
- ¿Qué ocurre al derivar repetidamente funciones trigonométricas?

Las funciones trigonométricas ocupan un papel central en cálculo debido a la manera en que describen cambios periódicos y conservan su estructura al derivar e integrar.

# La función logarítmica

A diferencia de muchas funciones conocidas, el logaritmo natural puede construirse directamente a partir de una integral.

Su definición surge de estudiar cómo se acumula el área bajo la curva:

$$\left( \begin{array}{l} y = \frac{1}{x} \end{array} \right)$$

## Definición:

Definimos la función logarítmica natural mediante:

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

Es decir,  $\ln(x)$  representa el área acumulada bajo la curva  $y = \frac{1}{x}$  desde  $(1)$  hasta  $(x)$ .

## Interpretación:

Cuando  $(x)$  aumenta, el área acumulada sigue creciendo.

Sin embargo, como:  $\frac{1}{x}$  disminuye lentamente, el crecimiento del logaritmo también se vuelve cada vez más lento.

<https://www.geogebra.org/classic/yhmd7z6t?embed>

## Actividad:

- ¿Qué representa geométricamente  $\ln(x)$ ?
- ¿Qué ocurre con el área acumulada cuando  $(x)$  aumenta?
- ¿Por qué el logaritmo crece cada vez más lentamente?
- ¿Qué relación existe entre acumulación y la función logarítmica?

El logaritmo natural puede interpretarse como una función de acumulación construida a partir de áreas.

Esta definición conecta directamente el logaritmo con el cálculo integral.



# Una propiedad fundamental del logaritmo

La definición del logaritmo como área acumulada permite descubrir propiedades sorprendentes.

Una de las más importantes es que el logaritmo transforma productos en sumas

Definimos

$$A(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

Una consecuencia notable de esta definición es que el logaritmo transforma productos en sumas:

$$\ln\{xy\} = \ln\{x\} + \ln\{y\}$$

El siguiente applet permite explorar visualmente esta propiedad mediante áreas acumuladas.

<https://www.geogebra.org/classic/xjneab7?embed>

Actividad:

- ¿Qué ocurre con  $A(x) + A(y)$  al mover los deslizadores?
- ¿Cómo se compara con  $A(xy)$ ?
- ¿Por qué esta propiedad puede simplificar cálculos con productos?
- ¿Qué relación observas entre multiplicar números y sumar logaritmos?

Esta propiedad convirtió a los logaritmos en una herramienta fundamental para realizar cálculos mucho antes de la existencia de las calculadoras electrónicas.

Además nos permite deducir otras relaciones útiles:

$$\ln\left\{\frac{x}{y}\right\} = \ln\{x\} - \ln\{y\}$$

$$\ln\{x^n\} = n \ln\{x\}$$

Estas propiedades muestran cómo el logaritmo transforma productos, cocientes y potencias en operaciones aditivas más sencillas.

# La función exponencial

La función exponencial surge como la inversa del logaritmo natural.

Si:

$$\begin{aligned} & \backslash( \\ & y=\ln(x) \\ & \backslash) \end{aligned}$$

entonces existe una función que “deshace” el logaritmo:

$$\begin{aligned} & \backslash( \\ & x=e^y \\ & \backslash) \end{aligned}$$

La función exponencial posee una propiedad extraordinaria:

$$\begin{aligned} & \backslash( \\ & \frac{d}{dx}(e^x)=e^x \\ & \backslash) \end{aligned}$$

Es decir, la función coincide con su propia derivada.

## Interpretación:

Esto implica que la razón de cambio de la función es proporcional a su valor actual.

Por esta razón, la función exponencial aparece naturalmente en modelos de:

- crecimiento poblacional
- interés compuesto
- desintegración radiactiva
- difusión
- procesos biológicos y económicos.

<https://www.geogebra.org/classic/wzzbfn2j?embed>

## Actividad:

- ¿Qué observas entre el valor de  $(e^x)$  y la pendiente de la tangente?
- ¿Por qué la función exponencial crece cada vez más rápido?

- ¿Qué significa que una función sea igual a su derivada?
- ¿Por qué este comportamiento es útil para modelar crecimiento?

La función exponencial ocupa un lugar central en cálculo debido a que su comportamiento de crecimiento se conserva al derivar e integrar.

Su relación con el logaritmo natural conecta acumulación y crecimiento.

# Derivadas e integrales

Algunas funciones aparecen constantemente en cálculo porque sus derivadas e integrales conservan estructuras simples y útiles.

Funciones trigonométricas:

$$\begin{aligned} & \backslash( \\ & (\sin x)' = \cos x \\ & \backslash) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \backslash( \\ & (\cos x)' = -\sin x \\ & \backslash) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \backslash( \\ & \int \sin x, dx = -\cos x + C \\ & \backslash) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \backslash( \\ & \int \cos x, dx = \sin x + C \\ & \backslash) \end{aligned}$$

Las funciones trigonométricas conservan un comportamiento periódico al derivar e integrar.

Logartimo Natural:

$$\begin{aligned} & \backslash( \\ & \frac{d}{dx} \ln(x) = \frac{1}{x} \\ & \backslash) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \backslash( \\ & \int \frac{1}{x}, dx = \ln|x| + C \\ & \backslash) \end{aligned}$$

El logaritmo natural surge de la acumulación asociada a la función  $(y = \frac{1}{x})$

Exponencial:

$$\begin{aligned} & \backslash( \\ & \frac{d}{dx} (e^x) = e^x \end{aligned}$$

\)

\(

$$\int e^x dx = e^x + C$$

\)

La función exponencial conserva exactamente la misma forma al derivar e integrar.

Muchas de las funciones más importantes del cálculo reaparecen constantemente porque sus derivadas e integrales conservan estructuras simples y útiles.