

DERIVADAS

En muchos contextos no solo nos interesa conocer el valor de una función, sino también **cómo cambia**. Por ejemplo, podemos preguntar qué tan rápido se mueve un objeto, qué tan rápido crece una población o qué tan inclinada es una curva en un punto. En este capítulo estudiaremos la derivada como una herramienta para describir **cambios instantáneos** y entender el comportamiento local de las funciones.

- [El problema del cambio](#)
- [Rectas Secantes y cambio promedio](#)
- [Recta Tangente](#)
- [Definición de Derivada](#)

El problema del cambio

Muchas cantidades en el mundo **cambian constantemente**.

- la velocidad de un automóvil
- la temperatura durante el día
- la altura de una pelota al ser lanzada
- el número de personas en una ciudad

Las matemáticas pueden describir **cuánto vale una cantidad en cada momento**.

Pero muchas veces queremos saber algo distinto:

¿qué tan rápido está cambiando esa cantidad en un instante?

Por ejemplo:

- ¿qué tan rápido se mueve un automóvil en este momento?
- ¿qué tan rápido cae una pelota en cierto instante?
- ¿qué tan inclinada está una curva en un punto?

Responder a esta pregunta llevó al desarrollo de una de las ideas centrales del cálculo:

la derivada.

El siguiente video presenta de manera visual este problema: cómo medir el cambio de una función en un punto.

<https://www.youtube.com/embed/9vKqVkJMqHk?si=XZuRL2j9roe-gclW>

Actividad

Una función describe la posición de un automóvil en el tiempo.

- ¿Qué significa que la pendiente de la gráfica en un punto sea positiva?
- ¿Qué significa que sea negativa?
- ¿Qué ocurre cuando la pendiente es cero?

En el video se muestra cómo una recta secante se aproxima a una tangente.

¿Qué ocurre con la pendiente de la recta cuando los dos puntos se acercan cada vez más?

Rectas Secantes y cambio promedio

En la página anterior nos preguntamos cómo medir el cambio **en un instante**.

Antes de responder eso, empecemos con algo más sencillo: **¿cómo medir el cambio entre dos puntos?**

Supongamos que una función describe la posición de un objeto en el tiempo. Si tomamos dos instantes distintos, podemos medir cuánto cambió la posición.

Esto nos da una medida del **cambio promedio**.

Geoméricamente, esto corresponde a la pendiente de una recta que une dos puntos de la gráfica.

A esta recta se le llama **recta secante**.

Actividad

Explora el applet y responde:

- ¿Qué ocurre con la pendiente de la recta secante cuando cambias la distancia entre los puntos?
- ¿Qué sucede cuando los dos puntos están muy separados?
- ¿Qué ocurre cuando los puntos se acercan?
- ¿Cómo cambia la pendiente dependiendo de la posición del segundo punto respecto al primero?
- Cuando los dos puntos están muy cerca, ¿la recta secante parece acercarse a una recta en particular?

<https://www.geogebra.org/classic/u4nsrhym?embed>

Recta Tangente

En la página anterior vimos cómo una recta secante mide el cambio entre dos puntos.

Pero surge una pregunta natural:

¿qué ocurre cuando esos dos puntos se acercan cada vez más?

Al acercar los puntos, la recta secante parece estabilizarse. Esa recta especial tiene un nombre: **recta tangente**.

Actividad:

Mueve el control de la distancia entre puntos y observa qué ocurre con la recta secante cuando los puntos se acercan cada vez más.

Activa la opción “Mostrar recta tangente” y compara ambas rectas.

<https://www.geogebra.org/classic/cpuuxnaa?embed>

Responde las siguientes preguntas:

- ¿Qué ocurre con la recta secante cuando los puntos están muy cerca?
- ¿Parece acercarse a una recta en particular?
- ¿Cómo se compara la recta secante con la recta tangente?
- ¿Qué puedes decir de la pendiente de ambas rectas cuando los puntos están muy próximos?

A la recta que se obtiene cuando los puntos se acercan cada vez más se le llama **recta tangente**.

Definición de Derivada

En la página anterior vimos que, al acercar dos puntos, la recta secante se aproxima a una recta especial: la recta tangente.

Pero surge una pregunta: **¿cómo describir matemáticamente esa recta?**

Sabemos que la pendiente de la recta secante es:

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Si hacemos que la distancia entre los puntos, Δx , se acerque a 0 , esta expresión se aproxima a la pendiente de la recta tangente.

A ese valor se le llama **derivada** de la función en el punto x_0 y se define como:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Esta expresión representa la pendiente de la recta tangente en el punto.

Es decir, describe el **cambio instantáneo** de la función.

Actividad

Explora el applet y responde:

- ¿Qué ocurre con la pendiente de la recta secante cuando la distancia entre los puntos tiende a cero?
- ¿A qué valor parece acercarse?
- ¿Cómo se relaciona este valor con la pendiente de la recta tangente?
- ¿Por qué necesitamos usar un límite para definir la pendiente en un punto?

<https://www.geogebra.org/classic/ajcuxcqt?embed>

La derivada permite describir cómo cambia una función en cada instante.

Es la herramienta que nos permite pasar de observar el cambio a **medirlo con precisión**.