

# CURVATURA DE LAS FUNCIONES

Hasta ahora hemos utilizado la derivada para entender cómo cambia una función: si crece, decrece o alcanza valores máximos o mínimos.

Pero aún hay algo más por explorar.

Podemos preguntarnos:

**¿cómo cambia ese cambio?**

Es decir, no solo si una función sube o baja, sino **cómo se curva su gráfica**.

En este capítulo estudiaremos la forma de las funciones: veremos cuándo se curvan hacia arriba, cuándo lo hacen hacia abajo y qué ocurre en los puntos donde este comportamiento cambia.

Descubriremos que la gráfica de una función no solo tiene dirección, sino también **curvatura**, y que esto nos da información más profunda sobre su comportamiento.

- [¿Cómo se curva una función?](#)
- [¿Qué nos dice la derivada sobre la curvatura?](#)
- [La segunda derivada](#)

# ¿Cómo se curva una función?

Hasta ahora hemos descrito si una función crece o decrece.

Pero eso no cuenta toda la historia.

Dos funciones pueden crecer y sin embargo verse completamente distintas.

La diferencia está en **cómo se curvan sus gráficas**.

<https://www.geogebra.org/classic/amqjdmqx?embed>

Observa cómo cambia la forma de la gráfica al mover el punto.

En algunos intervalos, la función se curva hacia abajo.  
En otros se curva hacia arriba.

Hay un punto donde este comportamiento cambia.

## Actividad:

Observa el applet y responde:

- ¿En qué parte la gráfica se curva hacia abajo?
- ¿En qué parte se curva hacia arriba?
- ¿En qué punto cambia la curvatura?
- ¿La función deja de crecer en ese punto?
- ¿Qué tiene de distinto ese punto respecto a los demás?

A partir de lo observado decimos que una función es:

- **cóncava hacia arriba** cuando la gráfica se abre hacia arriba
- **cóncava hacia abajo** cuando la gráfica se abre hacia abajo

El punto donde la gráfica cambia de curvatura se llama **punto de inflexión**.

No basta con saber si una función crece o decrece. También importa **cómo se curva**.

# ¿Qué nos dice la derivada sobre la curvatura?

Hasta ahora hemos descrito la curvatura de una función observando su gráfica. Pero surge una pregunta natural:

**¿podemos entender esto usando la derivada?**

<https://www.geogebra.org/classic/dzvdxdzg?embed>

Observa la recta tangente al mover el punto.

En algunos intervalos, la pendiente de la recta tangente va disminuyendo.  
En otros, va aumentando.

Esto está directamente relacionado con la forma de la gráfica.

Cuando la pendiente va aumentando, la gráfica es **cóncava hacia arriba**.

Cuando la pendiente va disminuyendo, la gráfica es **cóncava hacia abajo**.

**Actividad:**

Observa el applet y responde:

- ¿En qué parte la pendiente de la tangente va aumentando?
- ¿En qué parte va disminuyendo?
- ¿Cómo se relaciona esto con la curvatura de la gráfica?
- ¿Qué ocurre con la pendiente en el punto donde cambia la curvatura?

La curvatura de una función está relacionada con cómo cambia su pendiente.

No solo importa el valor de la derivada, sino **cómo cambia a lo largo del tiempo**.

# La segunda derivada

En la página anterior vimos que la curvatura de una función está relacionada con cómo cambia su pendiente.

Ahora vamos a describir esto usando derivadas.

La derivada nos dice cuál es la pendiente de la función.

Si queremos saber **cómo cambia esa pendiente**, necesitamos derivar otra vez.

## Definición:

A la derivada de la derivada se le llama **segunda derivada**, y se denota por  $f''(x)$

- Si  $f''(x) > 0$ , la pendiente va aumentando y la gráfica es **cóncava hacia arriba**.
- Si  $f''(x) < 0$ , la pendiente va disminuyendo y la gráfica es **cóncava hacia abajo**.

Cuando la segunda derivada cambia de signo, la gráfica cambia de curvatura.

A ese punto se le llama **punto de inflexión**.

<https://www.geogebra.org/classic/w2bvused?embed>

## Actividad:

Observa el applet y responde:

- ¿En qué intervalos la segunda derivada es positiva?
- ¿En cuáles es negativa?
- ¿En qué punto cambia de signo?
- ¿Qué ocurre con la gráfica en ese punto?

La segunda derivada nos permite entender cómo cambia la pendiente de una función.

Con esto podemos describir mejor su comportamiento.