

# APLICACIONES DE LA INTEGRAL

Hasta ahora hemos utilizado la integral para calcular áreas y para reconstruir funciones a partir de sus tasas de cambio.

Sin embargo, la idea de integración va mucho más allá de estos primeros ejemplos.

Siempre que una cantidad pueda interpretarse como la acumulación de pequeñas contribuciones, la integral proporciona una herramienta natural para calcularla.

En este capítulo exploraremos algunas aplicaciones clásicas de la integral, incluyendo áreas entre curvas, volúmenes de revolución y valores promedio.

Más allá de las fórmulas, el objetivo será reconocer una idea común: la integral permite construir cantidades globales a partir de información local.

- [Área entre curvas](#)
- [Volúmenes de revolución](#)
- [Valor promedio de una función](#)
- [Longitud de arco](#)

# Área entre curvas

Ya sabemos cómo calcular el área bajo una curva.

Pero muchas regiones de interés no están delimitadas por una función y el eje  $x$  sino por dos curvas distintas.

¿Cómo podemos calcular el área comprendida entre ellas?

Supongamos que una región está limitada por dos funciones:

$$f(x)$$

y

$$g(x)$$

con  $f(x)$  por encima de  $g(x)$  en el intervalo  $[a, b]$

En cada punto del intervalo, la distancia vertical entre la curva superior y la curva inferior es:

$$f(x) - g(x)$$

Por lo tanto, el área total puede obtenerse acumulando estas diferencias a lo largo del intervalo.

$$A(x) = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

Es importante identificar cuál función se encuentra arriba y cuál abajo, ya que el área se obtiene acumulando la distancia vertical entre ambas curvas.

Cuando las funciones se cruzan dentro del intervalo, suele ser necesario dividir la región en varias partes.

<https://www.geogebra.org/classic/svtvvvga?embed>

Actividad:

- ¿Qué representa la diferencia  $f(x) - g(x)$ ?
- ¿Qué ocurre si las dos curvas se acercan?
- ¿Cómo cambia el área cuando modificas alguna de las funciones?
- ¿Por qué restamos las funciones para calcular el área?
- ¿Qué ocurre cuando las funciones intercambian posiciones?

- ¿Sigue siendo válida la fórmula sin modificaciones?
- ¿Cómo identificar cuál función debe restarse de cuál?

El área entre curvas puede interpretarse como la acumulación de pequeñas diferencias entre dos funciones.

Esta idea permite extender el concepto de área a regiones mucho más generales que las estudiadas inicialmente.

# Volúmenes de revolución

Ya sabemos cómo calcular áreas mediante integrales.

Pero muchas veces una región plana puede utilizarse para construir un objeto tridimensional.

¿Cómo podemos calcular el volumen de ese sólido?

Supongamos que la región bajo una curva  $(y=f(x))$  gira alrededor del eje  $(x)$ .

Al rotar, cada sección transversal genera un disco cuyo radio es  $(f(x))$ .

Como el área de un disco es

$$\pi r^2$$

cada sección aporta aproximadamente

$$\pi [f(x)]^2 dx$$

al volumen total.

Acumulando todas estas contribuciones obtenemos

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

La integral permite acumular áreas de secciones transversales para construir un volumen.

<https://www.geogebra.org/classic/q3tjpkrx?embed>

Actividad:

- ¿Qué relación observas entre la curva de la izquierda y el sólido de la derecha?
- ¿Por qué aparece el cuadrado de  $f(x)$ ?
- ¿Qué ocurre con el volumen si la función aumenta?
- ¿En qué se diferencia calcular un área y calcular un volumen?

La integral permite construir volúmenes a partir de regiones planas mediante un proceso de acumulación.

Esta idea muestra cómo una función puede describir no solo una curva, sino también la forma y el tamaño de objetos tridimensionales.

# Valor promedio de una función

Cuando calculamos el promedio de varias cantidades, sumamos todos los valores y dividimos entre el número de observaciones.

Pero ¿cómo podemos calcular el valor promedio de una función en un intervalo continuo?

Si  $f(x)$  representa una cantidad que varía continuamente entre  $a$  y  $b$ , el valor promedio se define como

$$f_{\text{prom}} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

La integral calcula el área bajo la curva.

Al dividir entre la longitud del intervalo, obtenemos una altura constante que produce la misma área total.

<https://www.geogebra.org/classic/q5jnkn4?embed>

## Actividad:

- ¿Qué representa la altura del rectángulo?
- ¿Por qué el rectángulo y la región sombreada tienen la misma área?
- ¿Qué ocurre con el valor promedio cuando cambia la función?
- ¿En qué se diferencia el valor promedio de una función del promedio de una lista de números?

El valor promedio de una función puede interpretarse como una altura constante que produce la misma área total que la función original en un intervalo dado.

Esta idea conecta la acumulación descrita por la integral con una medida representativa del comportamiento global de la función.

# Longitud de arco

Cuando una función representa una trayectoria o un camino, puede ser útil conocer su longitud.

Por ejemplo, podríamos preguntarnos cuál es la distancia recorrida por un objeto que sigue una trayectoria curva o cuánto mide el borde de una región.

¿Cómo podemos calcular la longitud de una curva?

Podemos aproximar una curva mediante pequeños segmentos rectos.

Si dos puntos consecutivos de la curva tienen coordenadas

$$\begin{aligned} & \backslash[ \\ & (x, f(x)) \\ & \backslash] \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} & \backslash[ \\ & (x+dx, f(x)+df), \\ & \backslash] \end{aligned}$$

la longitud de ese pequeño segmento se obtiene usando el teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned} & \backslash[ \\ ds &= \sqrt{dx^2 + df^2}. \\ & \backslash] \end{aligned}$$

Factorizando  $(dx)$ , obtenemos

$$\begin{aligned} & \backslash[ \\ ds &= \sqrt{1 + \left(\frac{df}{dx}\right)^2} \, dx. \\ & \backslash] \end{aligned}$$

Al acumular todos estos pequeños segmentos a lo largo del intervalo  $[a, b]$ , obtenemos la longitud total:

La derivada mide qué tan inclinada es la curva en cada punto.

Cuando la pendiente aumenta, la longitud de cada pequeño segmento también aumenta.

La fórmula de longitud de arco acumula estas pequeñas distancias para obtener la longitud total de la trayectoria.

<https://www.geogebra.org/classic/v2xxvp8k?embed>

## Actividad:

- ¿Qué ocurre con la aproximación cuando aumenta el número de segmentos?
- ¿Por qué una curva puede aproximarse mediante segmentos rectos?
- ¿Qué papel desempeña la pendiente de la función en la longitud total?
- ¿Por qué la fórmula contiene la expresión  $\sqrt{1+[f'(x)]^2}$ ?

La longitud de arco puede interpretarse como la acumulación de pequeñas distancias a lo largo de una trayectoria.

Esta aplicación muestra cómo la integral permite medir no solo áreas y volúmenes, sino también la longitud de objetos curvos.