

APLICACIONES DE LA DERIVADA

Hasta ahora hemos construido la derivada a partir de la idea de cambio: primero como una razón de cambio promedio, luego como la pendiente de la recta tangente y, finalmente, como un límite.

Pero surge una pregunta natural:

¿para qué sirve la derivada?

En este capítulo exploraremos cómo interpretar la derivada en distintos contextos.

Veremos que la derivada no es solo una expresión algebraica, sino una herramienta que nos permite entender cómo cambian las cantidades: si crecen, decrecen, o alcanzan valores máximos o mínimos.

- [¿Qué mide la derivada?](#)
- [Crecimiento y Decrecimiento](#)
- [Máximos y Mínimos](#)
- [Puntos críticos](#)

¿Qué mide la derivada?

En el capítulo anterior definimos la derivada como la pendiente de la recta tangente.

Pero ahora viene la pregunta más importante:

¿Qué mide la derivada?

La derivada mide cómo cambia una función en un punto.

Pero no cualquier cambio. Mide el **cambio instantáneo**.

Un ejemplo: movimiento

Imagina que una función $f(t)$ describe la posición de un objeto a lo largo del tiempo.

En ese caso, la derivada $f'(t)$ nos dice:

qué tan rápido se mueve el objeto en ese instante

Es decir, su **velocidad**.

Actividad:

Explora el applet y responde:

- ¿Qué representa la función en este contexto?
- ¿Qué representa la pendiente de la recta tangente?
- ¿Qué ocurre con la velocidad cuando cambias el punto t_0 ?
- ¿En qué puntos la velocidad es positiva? ¿y en cuáles negativa?
- ¿Qué significa que la velocidad sea cero en un instante?
- ¿La velocidad es la misma en todos los puntos? Explica.

<https://www.geogebra.org/classic/ncw52cux?embed>

En este contexto, la derivada representa la velocidad instantánea: qué tan rápido se mueve el objeto en cada momento.

Crecimiento y Decrecimiento

Hasta ahora vimos que la derivada nos dice qué tan rápido cambia una función.

Pero hay algo aún más importante:

¿la función está aumentando o disminuyendo?

La derivada no solo mide rapidez.

También nos dice la dirección del cambio.

El signo de la pendiente de la recta tangente determina si la función crece o decrece.

Si la derivada es positiva, la función está creciendo.	$f'(x) > 0$
Si la derivada es negativa, la función está decreciendo.	$f'(x) < 0$
Si la derivada es cero, la función no está cambiando en ese instante.	$f'(x) = 0$

En el ejemplo del movimiento:

- velocidad positiva → el objeto avanza
- velocidad negativa → el objeto retrocede
- velocidad cero → el objeto se detiene momentáneamente

Actividad:

Explora el applet y responde:

- ¿En qué intervalos la función está creciendo?, ¿En cuáles está decreciendo?
- ¿Qué ocurre en los puntos donde la velocidad es cero?
- ¿La función cambia de comportamiento en esos puntos? Explica.
- ¿Cómo se relaciona el signo de la derivada con el comportamiento de la función?
- ¿Podemos usar la derivada para encontrar máximos y mínimos?

<https://www.geogebra.org/classic/hgrjuz8g?embed>

La derivada no solo mide rapidez: también indica la dirección del cambio.

El signo de la derivada permite entender el comportamiento de una función a lo largo de su dominio.

Máximos y Mínimos

Hay puntos especiales donde la derivada es cero.

En esos puntos, la función deja de crecer o decrecer momentáneamente.

Estos puntos se llaman **puntos críticos**.

Pero surge una pregunta importante:

Si una función deja de crecer y empieza a decrecer, ¿qué ocurre en ese punto?

Un **máximo** ocurre cuando la función pasa de crecer a decrecer, es decir, cuando la derivada cambia de positiva a negativa.

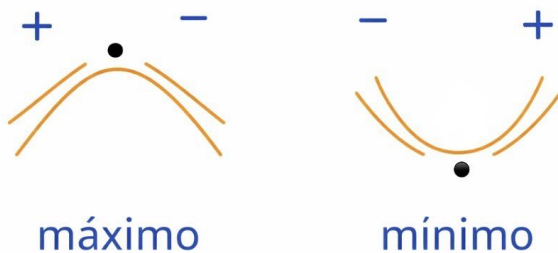
Un **mínimo** ocurre cuando la función pasa de decrecer a crecer; es decir, cuando la derivada cambia de negativa a positiva.

Hasta ahora vimos que cuando la derivada es cero, la función no está cambiando en ese instante. Pero eso no es suficiente para determinar el comportamiento de la función.

¿La función va a empezar a subir o a bajar?, eso depende de cómo cambia la derivada alrededor del punto.

Lo importante no es solo que $f'(x)=0$, sino **qué pasa alrededor del punto**.

Si $f'(x)$ cambia de signo:



Ejemplo

Considera la función $f(x)=x^2$

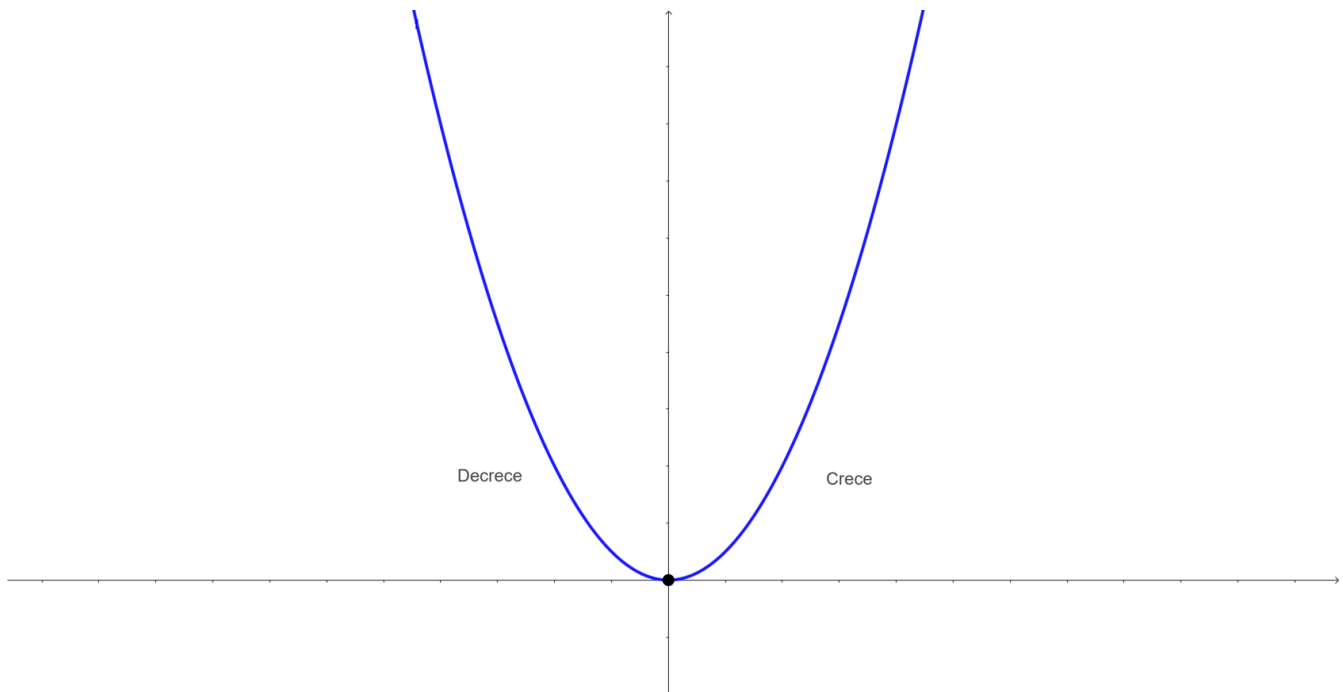
Observando la gráfica:

- Cuando $(x < 0)$ la función **decrece**
- Cuando $(x > 0)$, la función **crece**

Esto nos indica que:

- La derivada es **negativa** antes de $(x=0)$
- La derivada es **positiva** después de $(x=0)$

En $(x=0)$ la derivada es cero y cambia de negativa a positiva, Por lo tanto la función tiene un **mínimo**.



Pero... ¿qué pasa si la derivada es cero y la función no tiene ni máximo ni mínimo?...

Puntos críticos

Hasta ahora parece que cuando la derivada es cero, la función tiene un máximo o un mínimo, pero, ¿siempre es así?

Veamos un ejemplo donde esto no ocurre.

<https://www.geogebra.org/classic/cdcekyum?embed>

En ambos casos, la derivada en $(x=0)$ es cero, sin embargo, el comportamiento de las funciones es distinto.

En (x^2) , la función cambia de decrecer a crecer.

En (x^3) , la función sigue creciendo antes y después del punto.

Que la derivada sea cero **no es suficiente** para determinar un máximo o mínimo.

Actividad:

Observa el applet y responde:

- ¿Qué valor tiene la derivada en $(x=0)$ para ambas funciones?
- ¿Cómo se comporta cada función antes y después de ese punto?
- ¿En cuál de las dos hay un cambio de crecimiento a decrecimiento?
- ¿Qué diferencia fundamental observas entre ambos casos?

Que la derivada sea cero no garantiza un máximo o mínimo.

Lo que realmente importa es el **cambio de signo**.