

Vectores Aleatorios Discretos

Considere $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y $(X, Y): \Omega \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ una función biviada. Si para todo $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ se tiene $\{\omega \in \Omega : (X, Y)(\omega) = (x, y)\} \in \mathcal{F}$, entonces (X, Y) se dice un **vector aleatorio** (v.a.) definido sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Definición: Sea (X, Y) un v.a. y considere $(f_{XY}: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow [0, 1])$ tal que

$$f_{XY}(x, y) = \mathbb{P}(X=x, Y=y) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : (X, Y)(\omega) = (x, y)\})$$

Si $\{(x, y) : f_{XY}(x, y) > 0\}$ es finito o infinito numerable, (X, Y) se dice un **vector aleatorio discreto** y (f_{XY}) su **función masa de probabilidad conjunta** (f.m.p.).

El conjunto $S_{XY} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f_{XY}(x, y) > 0\}$ se llama **soporte** de (X, Y) .

Proposición: toda f.m.p. conjunta es no negativa y suma 1

Sea (X, Y) v.a. discreto con f.m.p. conjunta (f_{XY}) y soporte (S_{XY}) . Entonces

- $f_{XY}(x, y) \geq 0$ para todo (x, y) .
- $\sum_{(x, y) \in S_{XY}} f_{XY}(x, y) = 1$.

Demostración: (a) se sigue de los axiomas de probabilidad. Para (b), sea $(A_{ij}) = \{\omega : (X, Y)(\omega) = (x_i, y_j)\}$; como (A_{ij}) particiona (Ω) , por K2 y K3, $1 = \mathbb{P}(\Omega) = \sum_{i,j} \mathbb{P}(A_{ij}) = \sum_{(x_i, y_j) \in S_{XY}} f_{XY}(x_i, y_j)$.

Proposición (marginales): Sea (X, Y) v.a. discreto con f.m.p. conjunta (f_{XY}) . Entonces las **f.m.p. marginales** de (X) y (Y) son

$$f_X(x) = \sum_j f_{XY}(x, y_j), \quad f_Y(y) = \sum_i f_{XY}(x_i, y)$$

De la conjunta siempre se obtienen las marginales — pero **no al revés**: distintas conjuntas pueden compartir las mismas marginales (compare, abajo, los dados honestos y los dados cargados: ambos tienen $(f_X = f_Y = 1/6)$, pero conjuntas distintas).

Aplicación interactiva

Lanza dos dados (experiencia interactiva)

Lanzar una vez

Lanzar 500 veces

Reiniciar



Manipula la dependencia (datos cargados)

"Carga" (probabilidad extra cuando $X=Y$): 1

Ejercicio

(Barrios & Chambón, Cuaderno de Ejercicios CP2, ej. 1) Una urna tiene 2 bolas: una marcada con "0" y otra con "1". Se sacan dos bolas *con reemplazo*. Sea (X) el valor máximo entre las dos extracciones y (Y) el valor mínimo. Obtenga la f.m.p. conjunta de $((X,Y))$ y sus marginales.

Las dos extracciones son independientes y uniformes en $(\{0,1\})$, cada uno de los 4 pares $((0,0),(0,1),(1,0),(1,1))$ tiene probabilidad $(1/4)$. Como $(X=\max)$, $(Y=\min)$: $[f_{XY}(0,0)=\frac{1}{4}, \text{quad } f_{XY}(1,0)=\frac{2}{4}, \text{quad } f_{XY}(1,1)=\frac{1}{4}, \text{quad } f_{XY}(0,1)=0.]$ Sumando por filas/columnas: $(f_X(0)=\frac{1}{4}), (f_X(1)=\frac{3}{4}); (f_Y(0)=\frac{3}{4}), (f_Y(1)=\frac{1}{4})$.

Revision #8

Created 2026-09-10 22:45:40 UTC by Cheque Soto

Updated 2026-09-11 17:42:37 UTC by Cheque Soto