

Vectores Aleatorios Continuos

Un vector aleatorio continuo puede tomar cualquier valor en una región del plano. Su comportamiento se describe mediante una **función de densidad conjunta**.

Definición: Sea (X,Y) v.a. tal que para todo $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ (conjuntos borelianos),

$$P\big((X,Y) \in A\big) = \int_A h(x,y) dx dy$$
 para alguna función $h \geq 0$. Entonces (X,Y) se dice (absolutamente) **continuo**, con h como **función de densidad de probabilidad conjunta** (f.d.p.).

Propiedades: f.d.p. propia y relación con la f.p.a.

Sea (X,Y) v.a. continuo con f.d.p. conjunta h y f.p.a. conjunta F . Entonces

- $h(x,y) \geq 0$ para todo (x,y) , y $\int_{\mathbb{R}^2} h(x,y) dx dy = 1$ (f.d.p. *propia* o *legítima*).
- $F(x,y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y h(u,v) dv du$.
- Si F es diferenciable, $h(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$.
- Marginales: $F_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x,y) dy$, $F_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x,y) dx$ (se obtienen del Teorema Fundamental del Cálculo aplicado a $F_X(x) = F(x, \infty)$), invirtiendo el orden de integración por el Teorema de Fubini).

Ejemplo 1 resuelto (uniforme en el cuadrado $[0,1] \times [0,1]$): $h(x,y) = \mathbb{1}_C(x,y)$. Se obtiene $F(x,y) = xy$ en C , y las marginales $F_X(x) = x$, $F_Y(y) = y$ en $[0,1]$ — es decir, $(X,Y) \sim \text{Unif}(0,1)$.

Ejemplo 2 resuelto (soporte triangular): $h(x,y) = 2e^{-(x+y)} \mathbb{1}_{\{0 \leq x \leq y < \infty\}}(x,y)$. Integrando, $F_X(x) = 2e^{-2x}$ (exponencial de media $1/2$) y $F_Y(y) = 2e^{-y}(1 - e^{-y})$. Además $P(X+Y \leq 1) = 1 - 2e^{-1} \approx 0.2642$.

Aplicación interactiva

Ejemplo 1: distribución uniforme en el cuadrado $[0,1] \times [0,1]$

Punto (x,y) : 0.50 0.50

Ejemplo 2: densidad con soporte triangular

$f(x,y) = 2e^{-(x+y)}$ para $(0 \leq x \leq y < \infty)$.

Límite t para $X+Y \leq t$: 1.00

Ejercicio

Para el Ejemplo 1 (uniforme en $[0,1]^2$), verifique que $F(x,y)=xy$ es efectivamente la f.p.a. conjunta.

Para $(x,y) \in [0,1]^2$: $F(x,y) = \int_0^x \int_0^y \mathbb{1}_C(u,v) \, dv \, du = \int_0^x \int_0^y 1 \, dv \, du = xy$. Fuera del cuadrado se verifica por casos (si $x \geq 1, y \in [0,1]$: $F(x,y)=y$; si ambos ≥ 1 : $F(x,y)=1$; etc.), consistente con que $(X,Y) \sim \text{Unif}(0,1)$ independientes.