

# Teorema de Unicidad

El **Teorema de Unicidad** es fundamental: si dos variables aleatorias tienen la misma FGM en un entorno de 0, entonces tienen la misma distribución.  $\forall m_X(t) = m_Y(t) \quad \forall |t| < \delta \quad \Rightarrow \quad F_X = F_Y$

**¿Los momentos determinan la distribución?** En general, **no**. Existen distribuciones distintas con los mismos momentos. Ejemplo clásico: la distribución lognormal y una versión "perturbada":  $f_X(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\log x)^2}{2}}$ ,  $x > 0$   $f_Y(x) = f_X(x)[1 + \sin(2\pi \log x)]$ ,  $x > 0$  Tienen  $E[X^r] = E[Y^r]$  para todo  $r$ , pero son distribuciones diferentes. **Conclusión:** la FGM (cuando existe) es más poderosa que la secuencia de momentos.

## Verificación: Momentos de la Normal

$\mu$  (media):   $\sigma$  (desviación):  1.0

### Momentos de la Normal( $\mu$ , $\sigma^2$ ):

- $E[X] = \mu$
- $E[X^2] = \mu^2 + \sigma^2$
- $E[X^3] = \mu^3 + 3\mu\sigma^2$
- $E[X^4] = \mu^4 + 6\mu^2\sigma^2 + 3\sigma^4$

**Fórmula general para momentos centrales de la normal:**  $E[(X-\mu)^{2k}] = \sigma^{2k} (2k-1)!!$ ,  $E[(X-\mu)^{2k+1}] = 0$  donde  $(2k-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k-1)$ .

### ¿Para qué sirve el Teorema de Unicidad?

Es la herramienta que usamos para afirmar que si la FGM de una suma coincide con la FGM de una distribución conocida, entonces la suma **tiene** esa distribución. Sin este teorema, solo sabríamos que los momentos coinciden, pero no la distribución completa.

## Ejercicio

Sea  $(X)$  una variable aleatoria con  $(m_X(t) = (0.3+0.7e^t)^{10})$ . Use el Teorema de Unicidad para identificar la distribución de  $(X)$  sin calcular directamente su f.m.p., y calcule  $(\mathbb{E}[X])$  y  $(\operatorname{var}(X))$ .

Reconocemos que  $(0.3+0.7e^t = 1-p+pe^t)$  con  $(p=0.7)$  es la FGM de una  $(\text{Bernoulli}(0.7))$ . Como  $(m_X(t))$  es esa FGM elevada a la potencia 10, y sabemos (módulo anterior) que la FGM de una suma de 10 Bernoulli(p) i.i.d. es exactamente  $([1-p+pe^t]^{10})$ , la FGM de  $(X)$  coincide con la de una  $(\text{Bin}(10, 0.7))$ .

Por el Teorema de Unicidad, **sin necesidad de derivar ni de conocer la f.m.p. de  $(X)$** , concluimos que  $(X \sim \text{Bin}(10, 0.7))$ , y por lo tanto:  $(\mathbb{E}[X] = np = 10(0.7) = 7, \quad \operatorname{var}(X) = np(1-p) = 10(0.7)(0.3) = 2.1.)$  Esta es la fuerza del teorema: reconocer la "forma" de una FGM ya resuelve el problema por completo.

Revision #1

Created 2026-09-11 17:42:37 UTC by Cheque Soto

Updated 2026-09-11 17:42:37 UTC by Cheque Soto