

Teorema de Slutsky y Resultados Relacionados

Teorema de Slutsky: Si $(X_n \xrightarrow{D} X)$ y $(Y_n \xrightarrow{P} c)$ (constante), entonces:

- $(X_n + Y_n \xrightarrow{D} X + c)$
- $(X_n Y_n \xrightarrow{D} cX)$
- $(X_n / Y_n \xrightarrow{D} X/c)$ (si $c \neq 0$)

Verificación: Teorema de Slutsky con simulación

Distribución de X: c (constante): 1.0

Verificar Slutsky

Teorema de Mapeo Continuo: Si $g(\cdot)$ es continua y $(X_n \xrightarrow{D} X)$, entonces $(g(X_n) \xrightarrow{D} g(X))$.

Aplicación importante: Si $(Z_n \xrightarrow{D} N(0,1))$, entonces $(Z_n^2 \xrightarrow{D} \chi^2_1)$.

¿Qué aplicación tiene Slutsky en la práctica estadística?

Slutsky es fundamental para justificar que si $(\hat{\sigma}^2)$ es un estimador consistente de (σ^2) , entonces $(\frac{\bar{X}_n - \mu}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}} \xrightarrow{D} N(0,1))$. ¡Permite usar la desviación estándar muestral en intervalos de confianza!

Ejercicio

Sea $(\bar{X}_n)$ la media muestral de $(n=100)$ observaciones i.i.d. Bernoulli(0.3). Use el TCL y el Teorema de Mapeo Continuo para describir la distribución límite de $(W_n = \frac{n(\bar{X}_n - 0.3)^2}{0.3 \times 0.7})$.

Por el TCL, con $(p=0.3)$, $(p(1-p)=0.21)$: $[Z_n = \frac{\bar{X}_n - 0.3}{\sqrt{0.21/n}} = \sqrt{n} \cdot \frac{\bar{X}_n - 0.3}{\sqrt{0.21}} \xrightarrow{D} Z \sim N(0,1)]$ Reescribiendo (W_n) en términos de (Z_n) : $[W_n = \frac{n(\bar{X}_n - 0.3)^2}{0.21} =$

$\left(\sqrt{n} \cdot \frac{\bar{X}_n - 0.3}{\sqrt{0.21}}\right)^2 = Z_n^2$. \] Aplicando el Teorema de Mapeo Continuo con la función continua $(g(z)=z^2)$ a $(Z_n \xrightarrow{D} Z \sim N(0,1))$: $[W_n = Z_n^2 \xrightarrow{D} Z^2 \sim \chi^2_1]$. \] Este resultado — que el cuadrado de un estadístico estandarizado asintóticamente normal converge a una (χ^2_1) — es exactamente la base de las pruebas de bondad de ajuste y de las pruebas de proporciones en estadística inferencial.

Revision #1

Created 2026-09-11 17:42:36 UTC by Cheque Soto

Updated 2026-09-11 17:42:36 UTC by Cheque Soto