

Sumas Aleatorias

Sea (N) una variable aleatoria entera no negativa, y $(X_1, X_2, \dots)$ i.i.d. independientes de (N) . Definimos la suma aleatoria: $[S_N = X_1 + X_2 + \dots + X_N]$

Simulador: Elevador con personas

Número medio de personas (λ Poisson): 2.3 **Peso medio por persona (kg):** 66.25

Resultados clave para sumas aleatorias: $[\mathbb{E}[S_N] = \mathbb{E}[N] \cdot \mathbb{E}[X]]$ $[\operatorname{var}(S_N) = \operatorname{var}(N) \cdot (\mathbb{E}[X])^2 + \mathbb{E}[N] \cdot \operatorname{var}(X)]$

¿Por qué aparece $(\mathbb{E}[N] \cdot \operatorname{var}(X))$ y $(\operatorname{var}(N) \cdot (\mathbb{E}[X])^2)$?

Por la ley de varianza total: $(\operatorname{var}(S_N) = \mathbb{E}[\operatorname{var}(S_N|N)] + \operatorname{var}(\mathbb{E}[S_N|N]))$. El primer término da $(\mathbb{E}[N] \sigma_X^2)$ y el segundo $(\sigma_N^2 \mu_X^2)$.

Ejercicio

(Barrios y colaboradores, Cuaderno de Ejercicios CP2, sección 4, ej. 5) Sea $((X_i, i \in \mathbb{N}))$ una sucesión de v.a.i.i.d. con f.d.p. común $(f(x) = \lambda e^{-\lambda} x \mathbb{I}_{(0, \infty)}(x))$. Sea (N) una v.a. independiente de las (X_i) 's, con distribución Uniforme en $(\{1, 2, 3\})$. Considere la suma aleatoria $(S = \sum_{i=1}^N X_i)$. Encuentre su media y su varianza.

Para $(N \sim \text{Uniforme}\{1, 2, 3\})$: $(\mathbb{E}[N] = 2)$, $(\mathbb{E}[N^2] = \frac{1+4+9}{3} = \frac{14}{3})$, así que $(\operatorname{var}(N) = \frac{14}{3} - 4 = \frac{2}{3})$. Para cada $(X_i \sim \text{Exponencial}(\lambda))$: $(\mathbb{E}[X] = 1/\lambda)$, $(\operatorname{var}(X) = 1/\lambda^2)$. Aplicando las fórmulas de sumas aleatorias: $[\mathbb{E}[S] = \mathbb{E}[N] \cdot \mathbb{E}[X] = \frac{2}{\lambda}]$ $[\operatorname{var}(S) = \operatorname{var}(N) (\mathbb{E}[X])^2 + \mathbb{E}[N] \operatorname{var}(X) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\lambda^2} + 2 \cdot \frac{1}{\lambda^2} = \frac{8}{3\lambda^2}]$

$$\mathbb{E}[N]\operatorname{var}(X) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\lambda^2} + 2\cdot\frac{1}{\lambda^2} = \frac{8}{3}\cdot\frac{1}{\lambda^2}. \quad \square$$

Revision #1

Created 2026-09-11 17:42:37 UTC by Cheque Soto

Updated 2026-09-11 17:42:37 UTC by Cheque Soto