

Ley de los Grandes Números (LGN)

Ley Débil de los Grandes Números (LDGN):
$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{P} \mu = \mathbb{E}[X_1]$$

Ley Fuerte de los Grandes Números (LFGN):
$$\bar{X}_n \xrightarrow{c.s.} \mu$$

Simulación: Convergencia de la media muestral

Distribución:

n (tamaño muestra):

100

100

Simular trayectoria

Resetear

Demostración de la LDGN (con varianza finita)

$$\mathbb{P}(|\bar{X}_n - \mu| \geq \epsilon) \leq \frac{\text{var}(\bar{X}_n)}{\epsilon^2} = \frac{\sigma^2/n}{\epsilon^2} \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty$$

Por lo tanto, $\bar{X}_n \xrightarrow{P} \mu$.

Ejemplo del PDF (encuesta): Para estimar una proporción p con precisión $\epsilon=0.05$ y confianza 90% ($\delta=0.10$):
$$n \geq \frac{1}{4\delta\epsilon^2} = \frac{1}{4 \cdot 0.10 \cdot (0.05)^2} = 1000$$
 ¡Se necesitan al menos 1000 encuestas!

¿Por qué la LGN es fundamental en Estadística?

La LGN justifica que la media muestral es un **estimador consistente** de la media poblacional. Es la base de la inferencia estadística: al aumentar el tamaño de muestra, nuestras estimaciones se acercan a los verdaderos valores poblacionales.

Ejercicio

Usando la misma cota de Chebyshev del "Ejemplo del PDF" ($n \geq \frac{1}{4\delta\epsilon^2}$), calcule cuántas encuestas se necesitan para estimar una proporción con precisión $(\epsilon=0.02)$ y confianza 95%

$(\delta=0.05)$.

Sustituyendo directamente: $n \geq \frac{1}{4\delta\epsilon^2} = \frac{1}{4(0.05)(0.02)^2} = \frac{1}{0.0008} = 12500$. Se necesitarían 12,500 encuestas — mucho más que las 1000 del ejemplo, porque se pidió el doble de precisión (ϵ más pequeña, que entra al cuadrado en el denominador) y más confianza (δ más pequeña). Esta cota de Chebyshev es conservadora; en el módulo de Aplicaciones del TCL se verá una fórmula más ajustada (basada en la aproximación normal) que típicamente pide muestras bastante más pequeñas para la misma precisión y confianza.

Revision #1

Created 2026-09-11 17:42:36 UTC by Cheque Soto

Updated 2026-09-11 17:42:36 UTC by Cheque Soto