

Independencia de Variables Aleatorias

Dos variables (X) y (Y) son **independientes** si conocer el valor de una no aporta información sobre la otra.

Definición: $(X_1, \dots, X_n)$ se dicen **variables aleatorias independientes** si para cualesquiera conjuntos borelianos $(B_1, \dots, B_n) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$\mathbb{P}(X_1 \in B_1, \dots, X_n \in B_n) = \mathbb{P}(X_1 \in B_1) \cdots \mathbb{P}(X_n \in B_n).$$

Proposición: caracterización equivalente vía (F) y (f)

Sea (X, Y) con f.p.a. conjunta (F) y marginales (F_X, F_Y) , y f.d.p./f.m.p. conjunta (f) y marginales (f_X, f_Y) . (X) y (Y) son independientes si y solo si, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) = F_X(x)F_Y(y) \iff f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$. **Demostración (esbozo):** si los eventos $(A_x = \{X \leq x\})$ y $(B_y = \{Y \leq y\})$ son independientes para todo (x, y) , entonces $\mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) = \mathbb{P}(A_x \cap B_y) = \mathbb{P}(A_x)\mathbb{P}(B_y) = F_X(x)F_Y(y)$; derivando ambos lados (caso continuo) o sumando (caso discreto) se obtiene la factorización de (f) , y viceversa.

Lema de factorización: (X) y (Y) (con densidad/f.m.p. conjunta (f)) son independientes si y solo si existen funciones (g) y (h) tales que $f(x, y) = g(x)h(y)$ para todo (x, y) .

Regla práctica: si el **soporte** (S_{XY}) no es un rectángulo (producto cartesiano de dos conjuntos), es *imposible* que (X, Y) sean independientes. Si el soporte sí es un rectángulo, aún hay que verificar la factorización de (f) .

Aplicación interactiva

Lema de factorización (para variables continuas)

Selecciona un ejemplo:

Ejercicio

(Barrios & Chambón, Cuaderno de Ejercicios CP2, sección 2, ej. 3) Un estudiante sale de casa entre las 7:00 y las 7:40, y el trayecto le toma entre 30 y 40 minutos. Sea (X) el instante de salida (minutos después de las 7:00, $(X \sim \text{Unif}(0,40))$) y (Y) la duración del trayecto ($(Y \sim \text{Unif}(30,40))$), independientes. ¿Cuál es la probabilidad de llegar antes de las 8:00?

Se busca $\mathbb{P}(X+Y < 60)$ sobre el rectángulo $[0,40] \times [30,40]$ (área 400). Para $(x \in [0,20])$, todo $(y \in [30,40])$ cumple $(x+y < 60)$ (franja de altura 10). Para $(x \in (20,30])$, solo $(y < 60-x)$ sirve (altura $(30-x)$); para $(x > 30)$ no hay (y) válida. El área favorable es $[\int_0^{20} 10 \, dx + \int_{20}^{30} (30-x) \, dx = 200 + 50 = 250]$. Por lo tanto $\mathbb{P}(X+Y < 60) = 250/400 = 0.625$.

Revision #7

Created 2026-09-10 22:45:40 UTC by Cheque Soto

Updated 2026-09-11 17:42:37 UTC by Cheque Soto