

FGM Conjunta de la Multinomial

La **FGM conjunta** es una herramienta poderosa para derivar propiedades de la multinomial.

Teorema: Sea $(\mathbf{X} \sim \text{Multinomial}(n, p_1, \dots, p_k))$. Entonces $m_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = \mathbb{E}[e^{\mathbf{t}^T \mathbf{X}}] = (p_1 e^{t_1} + p_2 e^{t_2} + \dots + p_k e^{t_k})^n$

Demostración (usando el teorema multinomial)

$$\begin{aligned} m_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) &= \sum_{x_1 + \dots + x_k = n} \frac{n!}{x_1! \dots x_k!} p_1^{x_1} \dots p_k^{x_k} e^{t_1 x_1 + \dots + t_k x_k} \\ &= \sum_{x_1 + \dots + x_k = n} \frac{n!}{x_1! \dots x_k!} (p_1 e^{t_1})^{x_1} \dots (p_k e^{t_k})^{x_k} \\ &= (p_1 e^{t_1} + \dots + p_k e^{t_k})^n \end{aligned}$$
 donde el último paso es precisamente el **teorema multinomial**: $(a_1 + \dots + a_k)^n = \sum_{x_1 + \dots + x_k = n} \frac{n!}{x_1! \dots x_k!} a_1^{x_1} \dots a_k^{x_k}$

FGM conjunta para k=2 (Binomial)

Para $(X \sim \text{Bin}(n, p))$, la FGM es $m_X(t) = (1-p + p e^t)^n$

n: 10 p: 0.30 Graficar $m_X(t)$

Ejemplo: Calcular $\mathbb{E}[X_1 X_2]$ usando la FGM conjunta

Para $k=2$, $m_{X_1, X_2}(t_1, t_2) = (p_1 e^{t_1} + p_2 e^{t_2})^n$. $\frac{\partial^2 m}{\partial t_1 \partial t_2} = n(n-1)(p_1 e^{t_1} + p_2 e^{t_2})^{n-2} \cdot p_1 e^{t_1} \cdot p_2 e^{t_2}$ Evaluando en $(t_1=t_2=0)$: $\mathbb{E}[X_1 X_2] = n(n-1) p_1 p_2$ De aquí, $\text{cov}(X_1, X_2) = n(n-1)p_1 p_2 - np_1 \cdot np_2 = -n p_1 p_2$.

Ejercicio

Use la FGM marginal de (X_1) (que se obtiene evaluando $(t_2=\dots=t_k=0)$ en la FGM conjunta) para verificar, derivando dos veces, que $\text{var}(X_1) = np_1(1-p_1)$.

Con $(t_2=\dots=t_k=0)$, la FGM conjunta se reduce a $m_1(t) = (p_1 e^t + q_1)^n$, con $(q_1=1-p_1)$ (la FGM de una Binomial (n, p_1) , consistente con la propiedad marginal).

Derivando: $m_1'(t) = n(p_1 e^{t+q_1})^{n-1} p_1 e^t \implies m_1'(0) = np_1 = \mathbb{E}[X_1]$. Derivando otra vez (regla del producto): $m_1''(t) = n(n-1)(p_1 e^{t+q_1})^{n-2} (p_1 e^t)^2 + n(p_1 e^{t+q_1})^{n-1} p_1 e^t$. Evaluando en $(t=0)$ (donde $(p_1+q_1=1)$): $m_1''(0) = n(n-1)p_1^2 + np_1 = \mathbb{E}[X_1^2]$. Entonces: $\text{var}(X_1) = \mathbb{E}[X_1^2] - (\mathbb{E}[X_1])^2 = n(n-1)p_1^2 + np_1 - n^2 p_1^2 = np_1 - np_1^2 = np_1(1-p_1)$. Confirma la fórmula ya conocida, esta vez obtenida puramente por diferenciación de la FGM, sin usar la representación como suma de indicadoras.

Revision #1

Created 2026-09-11 17:42:37 UTC by Cheque Soto

Updated 2026-09-11 17:42:37 UTC by Cheque Soto