Estadísticos de Orden - Definición

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una **muestra aleatoria** (i.i.d.) de una población con función de distribución F. Los **estadísticos de orden** son las variables ordenadas: $$ X_{(1)} \le X_{(2)} \le \cdots \le X_{(n)} $$ donde $X_{(1)} = \min\{X_i\}$, $X_{(n)} = \max\{X_i\}$.

Simulador: Muestra aleatoria y estadísticos de orden

Tamaño de muestra n: 8 8 **Distribución:**

Generar nueva muestra

Aplicaciones:

- **Sistemas en serie:** El tiempo de vida es $X_{(1)}$ (el más débil falla primero)
- **Sistemas en paralelo:** El tiempo de vida es $X_{(n)}$ (el último en fallar)
- **Control de calidad:** El rango $R = X_{(n)} - X_{(1)}$ mide la variabilidad

¿Qué representa la mediana muestral en términos de estadísticos de orden?

Si n es impar, la mediana es $X_{((n+1)/2)}$ (el estadístico de orden central). Si n es par, la mediana es $\frac{1}{2}(X_{(n/2)} + X_{(n/2+1)})$.

Ejercicio

(Barrios y colaboradores, Cuaderno de Ejercicios CP2, sección 13, ej. 1) Considere $X_1,\ldots,X_n$ una muestra aleatoria de una población distribuida uniformemente en $(0,\theta)$. Considere los estimadores $\tilde\theta$ y $\hat\theta$ del parámetro θ dados por $\tilde\theta=2\bar X$, $\hat\theta=\frac{n+1}{n}X_{(n)}$. Muestre que ambos son estimadores insesgados de θ, es decir, $\mathbb{E}[\tilde\theta]=\theta$ y $\mathbb{E}[\hat\theta]=\theta$.

Para $\tilde\theta$: como $X_i\sim\text{Unif}(0,\theta)$, $\mathbb{E}[X_i]=\theta/2$, así que

$\mathbb{E}[\bar X]=\theta/2$ y $$ \mathbb{E}[\tilde\theta] = 2\,\mathbb{E}[\bar X] = 2\cdot\frac{\theta}{2} = \theta. $$ Para $\hat\theta$, necesitamos $\mathbb{E}[X_{(n)}]$. Usando $F(x)=x/\theta$ y la fórmula del máximo (módulo siguiente), $f_{X_{(n)}}(x)=n f(x)[F(x)]^{n-1} = \frac{n}{\theta^n}x^{n-1}$ para $0\le x\le\theta$. Entonces: $$ \mathbb{E}[X_{(n)}] = \int_0^\theta x\cdot\frac{n}{\theta^n}x^{n-1}\,dx = \frac{n}{\theta^n}\cdot\frac{\theta^{n+1}}{n+1} = \frac{n}{n+1}\theta. $$ Por lo tanto: $$ \mathbb{E}[\hat\theta] = \frac{n+1}{n}\cdot\frac{n}{n+1}\theta = \theta. $$ Ambos estimadores son insesgados, aunque tienen varianzas distintas — de hecho, $\hat\theta$ (basado en el máximo) resulta tener menor varianza para n grande, lo que lo hace preferible en la práctica.

Revision #1
Created 2026-09-11 17:42:36 UTC by Cheque Soto
Updated 2026-09-11 17:42:36 UTC by Cheque Soto