

Distribución Normal Bivariada

La **distribución normal bivariada** es la generalización natural de la normal univariada a dos dimensiones. Su función de densidad es: $f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\right\}$

Visualización interactiva de la normal bivariada

$\mu_1:$

$\sigma_1:$

$\mu_2:$

$\sigma_2:$

$\rho:$

0.00

Interpretación geométrica: El exponente es una forma cuadrática que define elipses. $Q(x_1, x_2) = \frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]$ Las curvas de nivel (donde f es constante) son elipses centradas en (μ_1, μ_2) .

Demostración: la normal bivariada tiene marginales normales

Para obtener $f_1(x_1)$, integramos respecto a x_2 : $f_1(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2) dx_2$ Con el cambio de variable $z_i = \frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i}$ y completando cuadrados: $f_1(x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{1}{2}z_1^2} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z_2 - \rho z_1}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)^2} dz_2}_{=1}$ Por lo tanto, $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$. Análogamente para X_2 .

¿Qué pasa con la densidad cuando $\rho = 0$?

Cuando $\rho = 0$, la densidad se factoriza: $f(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2} = f_1(x_1)f_2(x_2)$ Esto significa que X_1 y X_2 son **independientes**. En la normal bivariada, correlación cero $\Leftrightarrow$ independencia.

Ejemplo del PDF: Para $(X_1 \sim N(0,1))$, $(X_2 \sim N(2,4))$ con $(\rho = 0.5)$:

La densidad conjunta es $f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi \cdot 1 \cdot 2 \cdot \sqrt{1-0.25}} \exp\{-\frac{1}{2(0.75)}[x_1^2 - 2(0.5)x_1(\frac{x_2-2}{2}) + (\frac{x_2-2}{2})^2]\}$

Las marginales: $(X_1 \sim N(0,1))$, $(X_2 \sim N(2,4))$.

Ejercicio

Sea (X_1, X_2) normal bivariada con $(X_1 \sim N(1,4))$, $(X_2 \sim N(-2,9))$ y $(\rho=0)$. Use la propiedad de factorización para evaluar $f(3,-5)$.

Como $(\rho=0)$, $f(x_1, x_2) = f_1(x_1)f_2(x_2)$. Evaluando cada marginal: $f_1(3) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(3-1)^2}{2 \cdot 4}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0.5} \approx 0.1210$, $f_2(-5) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(-5+2)^2}{2 \cdot 9}} = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-0.5} \approx 0.0807$. Entonces: $f(3, -5) = f_1(3) \cdot f_2(-5) \approx 0.1210 \cdot 0.0807 \approx 0.00976$.

Revision #1

Created 2026-09-11 17:42:37 UTC by Cheque Soto

Updated 2026-09-11 17:42:37 UTC by Cheque Soto