

Distribución Multinomial General

La **distribución multinomial** generaliza la trinomial a (k) categorías. $(\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_k) \sim \text{Multinomial}(n, p_1, \dots, p_k))$ con $(\sum_{i=1}^k p_i = 1)$ y $(\sum_{i=1}^k X_i = n)$.

Función de masa de probabilidad conjunta: $(f_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_k) = \binom{n}{x_1 \dots x_k} p_1^{x_1} \dots p_k^{x_k} \cdot \mathbb{1}_{\{x_i \in \mathbb{N}_0, \sum x_i = n\}})$ donde $(\binom{n}{x_1 \dots x_k} = \frac{n!}{x_1! \dots x_k!})$ es el **coeficiente multinomial**.

Verificación de que es una f.m.p. propia

Por el **teorema multinomial**: $(p_1 + \dots + p_k)^n = \sum_{\{x_i: \sum x_i = n\}} \binom{n}{x_1 \dots x_k} p_1^{x_1} \dots p_k^{x_k}$ Como $(p_1 + \dots + p_k = 1)$, la suma es 1, verificando que la probabilidad total es 1.

Explora la Multinomial con k=4 categorías

n (ensayos):

30

Simular una realización

Resetear acumulador

Propiedades fundamentales:

- Distribución marginal: $(X_i \sim \text{Bin}(n, p_i))$
- $(E[X_i] = n p_i)$
- $(\text{var}(X_i) = n p_i (1-p_i))$
- $(\text{cov}(X_i, X_j) = -n p_i p_j)$ (para $(i \neq j)$)
- $(\text{corr}(X_i, X_j) = -\sqrt{\frac{p_i p_j}{(1-p_i)(1-p_j)}})$

¿Por qué la covarianza entre dos categorías es negativa?

Demostración: Sea $(X_i = \sum_{u=1}^n \mathbb{1}_{\{C_i\}}(e_u))$. Para $(u = v)$, $(\text{cov}(\mathbb{1}_{\{C_i\}}(e_u), \mathbb{1}_{\{C_j\}}(e_u)) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{C_i\}} \mathbb{1}_{\{C_j\}}] - p_i p_j = -p_i p_j)$ porque el producto es 0 (categorías excluyentes). Para $(u \neq v)$, por independencia, la covarianza es 0. Entonces $(\text{cov}(X_i, X_j) = \sum_{u=1}^n (-p_i p_j) = -n p_i p_j)$.

Ejemplo numérico (del PDF): Para $(X \sim \text{Multinomial}(n=100, p_1=0.3, p_2=0.2, p_3=0.5))$:

$$E[X_1] = 100 \cdot 0.3 = 30$$

$$\text{var}(X_1) = 100 \cdot 0.3 \cdot 0.7 = 21$$

$$\text{cov}(X_1, X_2) = -100 \cdot 0.3 \cdot 0.2 = -6$$

$$\text{corr}(X_1, X_2) = \frac{-6}{\sqrt{21 \cdot 100 \cdot 0.2 \cdot 0.8}} = \frac{-6}{\sqrt{336}} \approx -0.327$$

Ejercicio

(Barrios y colaboradores, Cuaderno de Ejercicios CP2, sección 8, ej. 2) Tres monedas honestas se lanzan 10 veces. Sea (X_i) el número de veces que se obtuvieron (i) águilas, $(i=0,1,2,3)$ (note que $(X_0+X_1+X_2+X_3=10)$). Calcule $P(X_0+X_1=6)$.

En cada uno de los 10 lanzamientos de las 3 monedas, el número de águilas sigue $\text{Bin}(3, 0.5)$, así que las probabilidades de categoría son $(p_i = \binom{3}{i} (0.5)^3)$: $(p_0=1/8)$, $(p_1=3/8)$, $(p_2=3/8)$, $(p_3=1/8)$.

Usando la propiedad marginal de la multinomial (agrupar categorías también da una multinomial): la categoría "0 o 1 águilas" tiene probabilidad $(p_0+p_1=1/8+3/8=1/2)$, y por lo tanto $(X_0+X_1 \sim \text{Bin}(10, 1/2))$: $P(X_0+X_1=6) = \binom{10}{6} (0.5)^{10} = \frac{210}{1024} \approx 0.2051$. Esto ilustra que agrupar categorías de una multinomial siempre produce otra multinomial (o binomial, si solo quedan dos grupos) sobre las probabilidades sumadas — la misma propiedad marginal $(X_i \sim \text{Bin}(n, p_i))$ mencionada arriba, aplicada a un grupo de categorías en vez de una sola.

Revision #1

Created 2026-09-11 17:42:37 UTC by Cheque Soto

Updated 2026-09-11 17:42:37 UTC by Cheque Soto