

Distribución Lognormal

Una variable (X) tiene distribución **lognormal** con parámetros (μ) y (σ^2) si $(\log X \sim N(\mu, \sigma^2))$. Su densidad es: $f_X(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\log x - \mu}{\sigma}\right)^2\right\}$, $x > 0$

Explora la distribución Lognormal

μ (media en escala log):

0

0.5

σ (desviación en escala log):

0.0

Propiedades de la Lognormal:

- $E[X] = \exp\left\{\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right\}$
- $\operatorname{var}(X) = (e^{\sigma^2} - 1) e^{2\mu + \sigma^2}$
- $E[X^r] = \exp\left\{r\mu + \frac{1}{2}r^2\sigma^2\right\}$ (todos los momentos finitos)
- No tiene FGM** (crece demasiado rápido)

Demostración de los momentos

Como $(\log X = Y \sim N(\mu, \sigma^2))$, la FGM de (Y) es $m_Y(t) = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$.
Entonces $E[X^r] = E[e^{rY}] = m_Y(r) = \exp\left\{r\mu + \frac{1}{2}r^2\sigma^2\right\}$.

¿Por qué la lognormal no tiene FGM si tiene todos los momentos finitos?

La FGM es $m_X(t) = E[e^{tX}]$. Para la lognormal, (e^{tX}) crece como (e^{te^Y}) , que es super-exponencial. La integral diverge para cualquier $(t > 0)$. Este es un contraejemplo clásico: tener todos los momentos finitos no garantiza la existencia de la FGM.

Ejercicio

Sea (X) lognormal con $(\mu=1)$, $(\sigma=0.5)$. Calcule $(\mathbb{E}[X])$ y $(\operatorname{var}(X))$.

Usando las fórmulas de esta página: $(\mathbb{E}[X] = \exp\left\{1 + \frac{0.25}{2}\right\} = e^{1.125} \approx 3.0802)$. $(\operatorname{var}(X) = (e^{0.25}-1)e^{2(1)+0.25} = (1.2840-1)(e^{2.25}) \approx 0.2840 \times 9.4877 \approx 2.6948)$. Nótese que $(\operatorname{var}(X) \approx 2.69)$ es menor que $(\mathbb{E}[X]^2 \approx 9.49)$ aquí, pero para (σ) más grande la varianza crece mucho más rápido que la media (por el factor (e^{σ^2})) — pruébelo en el simulador subiendo (σ) .

Revision #1

Created 2026-09-11 17:42:37 UTC by Cheque Soto

Updated 2026-09-11 17:42:37 UTC by Cheque Soto