Distribución F (Fisher-Snedecor)

La distribución F con m y n grados de libertad se define como: $$ W = \frac{X/m}{Y/n} \sim F_{m,n}, \quad \text{donde } X \sim \chi^2_m,\; Y \sim \chi^2_n \text{ independientes} $$ Su densidad es: $$ f_W(w) = \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(\frac{m}{n}\right)^{m/2} \frac{w^{\frac{m}{2}-1}}{\left(1+\frac{m}{n}w\right)^{\frac{m+n}{2}}}, \quad w > 0 $$

Explora la distribución F

Grados de libertad m (numerador): 5 **Grados de libertad n (denominador):** 10

Propiedades de la distribución F:

- Si $T \sim t_n$ (t-Student), entonces $T^2 \sim F_{1,n}$
- $W^{-1} \sim F_{n,m}$ (recíproca)
- $\mathbb{E}[W] = \frac{n}{n-2}$ para $n > 2$
- $\operatorname{var}(W) = \frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)}$ para $n > 4$
- Percentiles: $F(p; m, n) = \frac{1}{F(1-p; n, m)}$

Relación con la t-Student

Si $T \sim t_n$, entonces $T^2 = \frac{Z^2}{\chi^2_n/n}$.
Como $Z^2 \sim \chi^2_1$, tenemos $T^2 \sim \frac{\chi^2_1}{\chi^2_n/n} = \frac{\chi^2_1/1}{\chi^2_n/n} \sim F_{1,n}$.
Por lo tanto, ¡el cuadrado de una t-Student sigue una F con (1, n) grados de libertad!

Ejemplo de aplicación: En ANOVA, la estadística $F = \frac{\text{MSB}}{\text{MSW}}$ sigue una distribución $F_{k-1, N-k}$ bajo la hipótesis nula.
Para $m=3, n=12$, el valor crítico al 95% es aproximadamente 3.49.

¿Qué le pasa a la distribución F cuando m y n crecen?

Cuando $n \to \infty$, $F_{m,n}$ converge a χ^2_m/m (una chi-cuadrada escalada).
Cuando $m \to \infty$, el comportamiento es similar. En la práctica, para grados de libertad

grandes (>100), la distribución F se aproxima a una normal.

Ejercicio

Usando la propiedad de reciprocidad $W^{-1}\sim F_{n,m}$ (mencionada arriba), derive la relación de percentiles $F(p;m,n) = 1/F(1-p;n,m)$.

Por definición, $F(p;m,n)$ es el valor tal que $\mathbb{P}(W\le F(p;m,n))=p$, donde $W\sim F_{m,n}$. Esta desigualdad es equivalente a: $$ \mathbb{P}(W\le F(p;m,n)) = \mathbb{P}\!\left(\frac{1}{W}\ge \frac{1}{F(p;m,n)}\right) = p, $$ es decir, $$ \mathbb{P}\!\left(\frac{1}{W} < \frac{1}{F(p;m,n)}\right) = 1-p. $$ Pero por la propiedad de reciprocidad, $1/W\sim F_{n,m}$. Por definición de percentil aplicada a $1/W$, el valor v tal que $\mathbb{P}(1/W\le v)=1-p$ es exactamente $v=F(1-p;n,m)$. Comparando ambas expresiones: $$ F(1-p;n,m) = \frac{1}{F(p;m,n)} \quad\Longleftrightarrow\quad F(p;m,n) = \frac{1}{F(1-p;n,m)}. $$ Esta identidad es la razón práctica por la que las tablas de la distribución F solo publican percentiles altos (como 0.95 o 0.99): los percentiles bajos se obtienen invirtiendo y cambiando el orden de los grados de libertad.

Revision #1
Created 2026-09-11 17:42:37 UTC by Cheque Soto
Updated 2026-09-11 17:42:37 UTC by Cheque Soto