Distribución del Rango

El **rango** de la muestra es $R = X_{(n)} - X_{(1)}$. Su densidad está dada por: $$ f_R(r) = n(n-1) \int_{-\infty}^{\infty} f(u) f(r+u) [F(r+u) - F(u)]^{n-2} du, \quad r \ge 0 $$

Distribución del rango para Uniforme(0,1)

n (tamaño muestra): 10 10 Simular rango

Derivación de la densidad conjunta de (X_1, X_n)

$$ \begin{aligned} F_{1n}(x,y) &= \mathbb{P}(X_{(1)} \le x, X_{(n)} \le y) \\ &= \mathbb{P}(X_{(n)} \le y) - \mathbb{P}(X_{(1)} > x, X_{(n)} \le y) \\ &= [F(y)]^n - [F(y) - F(x)]^n \end{aligned} $$ Derivando: $f_{1n}(x,y) = n(n-1) f(x) f(y) [F(y) - F(x)]^{n-2}$

Ejemplo importante: Para uniformes en (0,1), la densidad del rango es $$ f_R(r) = n(n-1) r^{n-2} (1-r), \quad 0 \le r \le 1 $$ ¡El rango tiene distribución **Beta($n-1, 2$)**!

¿Qué pasa con el rango cuando n crece?

Para uniformes (0,1), $\mathbb{E}[R] = \frac{n-1}{n+1} \to 1$ cuando $n \to \infty$. El rango tiende a 1 (cubre todo el intervalo). La varianza $\operatorname{var}(R) = \frac{2(n-1)}{(n+1)^2(n+2)} \to 0$.

Ejercicio

(Barrios y colaboradores, Cuaderno de Ejercicios CP2, sección 13, ej. 2) Sea $U=(U_1,\ldots,U_n)$ una muestra aleatoria de $U\sim\text{Unif}(\mu-\theta,\mu+\theta)$. Encuentre la f.d.p. del rango muestral $R(U)=U_{(n)}-U_{(1)}$.

Como $\text{Unif}(\mu-\theta,\mu+\theta) = \mu-\theta+2\theta\cdot\text{Unif}(0,1)$ (una transformación afín), el rango R de la muestra U es simplemente 2θ veces el rango R' de una muestra de n Uniforme(0,1) i.i.d. — la traslación por $\mu-\theta$ se cancela al restar $U_{(n)}-U_{(1)}$, y el reescalamiento por 2θ pasa directamente al rango.

Ya sabemos (ejemplo de esta página) que $R'\sim\text{Beta}(n-1,2)$, con densidad $f_{R'}(r')=n(n-1)r'^{n-2}(1-r')$ para $0\le r'\le1$. Como $R=2\theta R'$, usando el cambio de variable $r'=r/(2\theta)$, $dr'/dr=1/(2\theta)$: $$ f_R(r) = f_{R'}\!\left(\frac{r}{2\theta}\right)\cdot\frac{1}{2\theta} = \frac{n(n-1)}{2\theta}\left(\frac{r}{2\theta}\right)^{n-2}\left(1-\frac{r}{2\theta}\right), \quad 0\le r\le 2\theta. $$

Revision #1
Created 2026-09-11 17:42:36 UTC by Cheque Soto
Updated 2026-09-11 17:42:36 UTC by Cheque Soto