

Desigualdad de Chebyshev

Desigualdad de Chebyshev: Sea (X) con media (μ) y varianza (σ^2) finitas. Entonces, para todo $(\epsilon > 0)$: $P(|X - \mu| \geq \epsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\epsilon^2}$ Equivalente, para $(k > 0)$: $P(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$, $\quad P(|X - \mu| < k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$

Visualización: Cota de Chebyshev vs probabilidad real

Distribución:

k (desviaciones):

2

2.0

Verificar

Demostración

Sea $(Y = (X - \mu)^2 \geq 0)$. Aplicando Markov a (Y) con $(c = \epsilon^2)$: $P((X - \mu)^2 \geq \epsilon^2) \leq \frac{E[(X - \mu)^2]}{\epsilon^2} = \frac{\sigma^2}{\epsilon^2}$ Como $(\{(X - \mu)^2 \geq \epsilon^2\} = \{|X - \mu| \geq \epsilon\})$, se obtiene el resultado.

Ejemplo del PDF (tienda): Número de clientes por día: media 20, desviación 2. $P(17 \leq X \leq 23) = P(|X - 20| < 3) \geq 1 - \frac{4}{9} \approx 0.5556$ Si usamos $(k=2)$ (2 desviaciones): $P(|X - 20| < 4) \geq 1 - 1/4 = 0.75$
¡Chebyshev garantiza al menos 75% de probabilidad en el intervalo [16,24]!

¿Qué pasa si aplicamos Chebyshev a una distribución Cauchy?

La Cauchy no tiene varianza finita, por lo que **no se puede aplicar Chebyshev**. El simulador lo detectará y mostrará un mensaje de advertencia. Esto muestra que Chebyshev requiere varianza finita.

Ejercicio

El peso de los paquetes producidos por una fábrica tiene media 50 kg y desviación estándar 4 kg. Acote $P(|X - 50| \geq 12)$ usando Chebyshev, y exprese el

resultado también en términos de un intervalo garantizado.

Con $(\sigma=4)$, $(\epsilon=12)$: $\mathbb{P}(|X-50|\geq 12) \leq \frac{\sigma^2}{\epsilon^2} = \frac{16}{144} = \frac{1}{9} \approx 0.1111$. Equivalentemente, con $(k=\epsilon/\sigma=12/4=3)$ desviaciones estándar: $\mathbb{P}(38 \leq X \leq 62) = \mathbb{P}(|X-50|<12) \geq 1-\frac{1}{9} = \frac{8}{9} \approx 0.8889$. Sin conocer la forma exacta de la distribución de pesos, Chebyshev garantiza que al menos el 88.9% de los paquetes pesan entre 38 y 62 kg.

Revision #1

Created 2026-09-11 17:42:36 UTC by Cheque Soto

Updated 2026-09-11 17:42:36 UTC by Cheque Soto