

Densidad Conjunta de los Estadísticos de Orden

La densidad conjunta de todos los estadísticos de orden es: $f_{X_{(1)}, \dots, X_{(n)}}(y_1, \dots, y_n) = n! \prod_{i=1}^n f(y_i), \quad y_1 < y_2 < \dots < y_n$

Visualización: Espaciados de uniformes

n (tamaño muestra): 5 Generar espaciados

Demostración

La transformación de $(X_1, \dots, X_n)$ a $(X_{(1)}, \dots, X_{(n)})$ es una permutación. Hay $(n!)$ permutaciones posibles, cada una con determinante jacobiano 1. Por el teorema de transformación multivariado: $f_Y(y) = \sum_{\text{permutaciones}} f_X(h(y)) = n! \prod_{i=1}^n f(y_i), \quad y_1 < \dots < y_n$

Propiedad importante: Los **espaciados** $(D_i = X_{(i)} - X_{(i-1)})$ (con $X_{(0)}=0$) tienen propiedades especiales. Para uniformes $(0,1)$, los vectores de espaciados tienen distribución **Dirichlet** con parámetros $(\alpha_i = 1)$.

¿Cuál es la probabilidad de que (X_k) sea el mínimo de una muestra?

Para exponenciales con tasas distintas: $\mathbb{P}(X_k = \min\{X_1, \dots, X_n\}) = \frac{\lambda_k}{\sum_{i=1}^n \lambda_i}$ (resultado demostrado en el PDF). Para i.i.d., la probabilidad es $(1/n)$.

Ejercicio

(Barrios y colaboradores, Cuaderno de Ejercicios CP2, sección 13, ej. 7) Sean $(X_1, \dots, X_n)$ i.i.d. con densidad $f(x) = \frac{1}{\theta} \mathbb{1}_{(0, \theta)}(x)$. Muestre que

$(X_{(1)}/X_{(n)})$ y $(X_{(n)})$ son independientes.

Con $(F(x)=x/\theta)$, la densidad conjunta de $(X_{(1)}, X_{(n)})$ (fórmula del módulo "Distribución del Rango") es: $f_{1n}(x,y) = n(n-1)f(x)f(y)[F(y)-F(x)]^{n-2} = \frac{n(n-1)}{\theta^n}(y-x)^{n-2}$, $\text{quad } 0 < x < y < \theta$. Sea $(U=X_{(1)}/X_{(n)})$, $(V=X_{(n)})$, de modo que $(X_{(1)})=UV$, $(X_{(n)})=V$. El jacobiano de $((x,y) \rightarrow (u,v))$ es $|\det \begin{pmatrix} v & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}| = v$. Sustituyendo $(y-x=v-uv=v(1-u))$: $f_{U,V}(u,v) = \frac{n(n-1)}{\theta^n} [v(1-u)]^{n-2} \cdot v = \frac{n(n-1)}{\theta^n} (1-u)^{n-2} v^{n-1}$, $\text{quad } 0 < u < 1, 0 < v < \theta$. ¡La densidad conjunta se factoriza en una función de (u) y una función de (v) ! Por lo tanto $(U=X_{(1)}/X_{(n)})$ y $(V=X_{(n)})$ son independientes — integrando por separado se obtiene $f_U(u)=(n-1)(1-u)^{n-2}$ (una Beta(1,n-1)) y $f_V(v)=nv^{n-1}/\theta^n$ (la densidad del máximo ya conocida del módulo 2).

Revision #1

Created 2026-09-11 17:42:36 UTC by Cheque Soto

Updated 2026-09-11 17:42:36 UTC by Cheque Soto