

Caso continuo: densidad condicional y ley del estadístico inconsciente

Intuición: En el mundo continuo, condicionar en un evento de probabilidad cero ($Y=y$) requiere límites. La densidad condicional $f(x|y)$ es un "corte" de la superficie conjunta, normalizado. Piensa en la recta de regresión: la esperanza condicional $E[X|Y=y]$ es la mejor predicción de X dado Y .

Simulador: densidad condicional exponencial (ejemplo del PDF)

Densidad conjunta: $f(x,y) = \frac{1}{y} e^{-x/y} e^{-y}$, para $(x>0, y>0)$. Dado $(Y=y)$, $(X|Y=y) \sim \text{Exp}(1/y)$.

Valor condicionante (y) : $y = 2.0$

Simular observación $X | Y=y$

Ver insight teórico

La densidad condicional es $f(x|y) = \frac{1}{y} e^{-x/y}$ (exponencial con media y). La esperanza condicional $E[X|Y=y]=y$. Ley de esperanza total: $E[X] = E[E[X|Y]] = E[Y] = 1$ (pues $Y \sim \text{Exp}(1)$). Arrastra y observa cómo la curva se aplanas o encoge.

Notación continua: $f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$. $P(a \leq X \leq b | Y=y) = \int_a^b f(x|y)dx$, $E[X|Y=y] = \int x f(x|y)dx$.

Ejercicio

(Barrios y colaboradores, Cuaderno de Ejercicios CP2, sección 3, ej. 1b) Las concentraciones de monóxido de carbono (X) y de bióxido de carbono (Y) en las

emisiones de un coche elegido al azar siguen una distribución conjunta $f_{X,Y}(x,y)=2e^{-x-y}\mathbb{1}_{\{0\leq y<x<\infty\}}(x,y)$. Si se observa una concentración de $(Y=2)$, ¿cuál es la probabilidad de que la concentración de monóxido de carbono (X) sea mayor que 4?

Primero encontramos la marginal de (Y) , integrando sobre (x) desde (y) hasta (∞) (por el soporte $(x>y)$): $[f_Y(y) = \int_y^\infty 2e^{-x-y} dx = 2e^{-y} \int_y^\infty e^{-x} dx = 2e^{-y} \cdot e^{-y} = 2e^{-2y}, \quad y>0.]$ La densidad condicional es entonces: $[f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{2e^{-x-y}}{2e^{-2y}} = e^{-(x-y)}, \quad x>y,]$ es decir, $(X-y)\mid Y=y\sim\text{Exponencial}(1)$ — la misma estructura de "exponencial desplazada" vista en el ejemplo de esta página. Entonces: $[\mathbb{P}(X>4\mid Y=2) = \mathbb{P}(X-2>2\mid Y=2) = e^{-2} \approx 0.1353.]$

Revision #1

Created 2026-09-11 17:42:37 UTC by Cheque Soto

Updated 2026-09-11 17:42:37 UTC by Cheque Soto