

Aplicación: Costo de reparación

Problema (Wackerly et al., Ej. 5.120): Una muestra de (n) artículos. (p_1) = proporción con 1 defecto, (p_2) = proporción con más de 1 defecto. Costo de reparación: $(C = Y_1 + 3Y_2)$, donde (Y_1) = número con 1 defecto, (Y_2) = número con más de 1 defecto.

Solución teórica (paso a paso):

Paso 1: Identificar la distribución

$(Y_0, Y_1, Y_2) \sim \text{Multinomial}(n, p_0, p_1, p_2)$ con $(p_0 = 1 - p_1 - p_2)$.

Paso 2: Esperanza de C $[E[C] = E[Y_1] + 3E[Y_2] = np_1 + 3np_2 = n(p_1 + 3p_2)]$ Para $(n=100, p_1=0.3, p_2=0.2)$: $(E[C] = 100(0.3 + 0.6) = 90)$

Paso 3: Varianza de C
$$\begin{aligned} \operatorname{var}(C) &= \operatorname{var}(Y_1) + 9\operatorname{var}(Y_2) + 2 \cdot 3 \cdot \operatorname{cov}(Y_1, Y_2) \\ &= np_1(1-p_1) + 9np_2(1-p_2) - 6np_1p_2 \\ &= n[p_1(1-p_1) + 9p_2(1-p_2) - 6p_1p_2] \end{aligned}$$
 Para $(n=100, p_1=0.3, p_2=0.2)$:
$$\begin{aligned} \operatorname{var}(C) &= 100[0.3 \cdot 0.7 + 9 \cdot 0.2 \cdot 0.8 - 6 \cdot 0.3 \cdot 0.2] \\ &= 100[0.21 + 1.44 - 0.36] = 100 \cdot 1.29 = 129 \end{aligned}$$

Simulador de costos

n (artículos): 100 **p₁ (1 defecto):** 0.30
p₂ (>1 defecto): 0.20

¿Qué pasa con el costo esperado si duplicamos p₂?

Si (p_2) pasa de 0.2 a 0.4 (reduciendo (p_0)): $(E[C] = 100(0.3 + 3 \cdot 0.4) = 100(0.3 + 1.2) = 150)$ (aumenta de 90 a 150). La varianza también aumenta significativamente por el término $(9p_2(1-p_2))$.

Ejercicio

(Barrios y colaboradores, Cuaderno de Ejercicios CP2, sección 8, ej. 3) Cincuenta recién egresados de preparatoria fueron elegidos aleatoriamente y se les preguntó qué carrera estudiarían en el ITAM. Sus preferencias fueron: 25 por Economía, 10 por Actuaría y Finanzas, 5 por Ciencia de Datos y 10 por Matemáticas Aplicadas. Suponiendo que, a priori, las cuatro carreras fueran igualmente populares ($(p_i = 1/4)$ cada una), ¿qué tan probable es este resultado exacto?

Sea $((X_1, X_2, X_3, X_4) \sim \text{Multinomial}(n=50, p_1=p_2=p_3=p_4=1/4))$, con el resultado observado $((25, 10, 5, 10))$. Usando la f.m.p. conjunta: $[\mathbb{P} = \frac{50!}{25! \cdot 10! \cdot 5! \cdot 10!} \left(\frac{1}{4}\right)^{50} \approx 9.8 \times 10^{-7}]$ Es decir, si las cuatro carreras fueran realmente igual de populares, este resultado exacto ocurriría en aproximadamente 1 de cada millón muestras de este tamaño — extremadamente improbable. Esto sugiere fuertemente que las carreras **no** son igualmente preferidas entre los egresados (en particular, Economía parece mucho más popular que $(1/4)$). Este tipo de razonamiento —comparar la probabilidad observada contra una hipótesis de "igual de probable"— es la idea central detrás de las pruebas de bondad de ajuste (chi-cuadrada) que generalizan este cálculo.

Revision #1

Created 2026-09-11 17:42:37 UTC by Cheque Soto

Updated 2026-09-11 17:42:37 UTC by Cheque Soto