

Suma y cociente de variables y vectores aleatorios

- [Suma de Variables Aleatorias - Convolución](#)
- [Suma de Gammas y Propiedades de la Convolución](#)
- [Cociente de Variables Aleatorias](#)
- [Distribución F \(Fisher-Snedecor\)](#)
- [Aplicaciones: Cociente de Chi-cuadradas](#)

Suma de Variables Aleatorias - Convolución

Para variables independientes, la densidad de la suma $(Z = X + Y)$ es la **convolución**:
$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx = (f_X * f_Y)(z)$$
 En el caso discreto:
$$f_{X+Y}(z) = \sum_x f_X(x) f_Y(z-x)$$

Simulador: Suma de dos uniformes independientes en (0,1)

Generar muestra de X+Y

Derivación de la convolución

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= \mathbb{P}(X+Y \leq z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{z-x} f_X(x) f_Y(y) dy dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) F_Y(z-x) dx \\ f_Z(z) &= \frac{d}{dz} F_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx \end{aligned}$$

Ejemplo del PDF: Suma de dos Uniformes(0,1) $f_Z(z) = \begin{cases} z & 0 \leq z < 1 \\ 2-z & 1 \leq z \leq 2 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$ Esta es la **distribución triangular** (Irwin-Hall con $n=2$).

¿Qué forma tiene la suma de tres uniformes independientes?

La suma de tres uniformes (Irwin-Hall con $n=3$) tiene una densidad formada por tres segmentos de parábola:
$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{2}z^2 & 0 \leq z < 1 \\ \frac{1}{2}(-2z^2 + 6z - 3) & 1 \leq z < 2 \\ \frac{1}{2}(3-z)^2 & 2 \leq z \leq 3 \end{cases}$$
 En general, la suma de (n) uniformes se aproxima a una normal por el TCL.

Ejercicio

(Barrios y colaboradores, Cuaderno de Ejercicios CP2, sección 10, ej. 1) Sea (a) una constante. Demuestre que la diferencia de dos variables aleatorias independientes, ambas con distribución uniforme en el intervalo $((a-1/2, a+1/2))$, tiene función de densidad $(f(u)=1-|u|)$ para $(-1 < u < 1)$.

Sean $(X, Y) \sim \text{Unif}(a-1/2, a+1/2)$ independientes, y $(U = X - Y)$. La constante (a) se cancela por traslación: si $(X' = X - a)$, $(Y' = Y - a)$, entonces $(X', Y') \sim \text{Unif}(-1/2, 1/2)$ y $(U = X' - Y')$, así que basta considerar $(a = 0)$.

Usando la fórmula de convolución para la diferencia, $(f_U(u) = \int f_X(x) f_Y(x-u) dx)$, con $(f_X = f_Y = \mathbb{1}_{(-1/2, 1/2)})$: $[f_U(u) = \int_{-1/2}^{1/2} \mathbb{1}_{(-1/2, 1/2)}(x-u) dx = \text{longitud de } (-1/2, 1/2) \cap (u-1/2, u+1/2)]$ Para $(0 \leq u < 1)$, esta intersección es el intervalo $((u-1/2, 1/2))$, de longitud $(1-u)$. Por simetría (f_U) es par, ya que $(X-Y)$ y $(Y-X)$ tienen la misma distribución, para $(-1 < u \leq 0)$ la longitud es $(1+u)$. En ambos casos, $(f_U(u) = 1 - |u|)$ para $(-1 < u < 1)$.

Suma de Gammas y Propiedades de la Convolución

La **convolución** es una operación entre funciones que es:

- **Conmutativa:** $f_X * f_Y = f_Y * f_X$
- **Asociativa:** $(f_X * (f_Y * f_Z)) = ((f_X * f_Y) * f_Z)$

Visualización: Suma de dos variables Gamma

α_1 (forma 1): 2.0 α_2 (forma 2): 3.0 β
(escala común): 1.0

Demostración: Suma de Gammas independientes

Si $(X \sim \text{Gamma}(\alpha_1, \beta))$ e $(Y \sim \text{Gamma}(\alpha_2, \beta))$ independientes:

$$f_Z(z) = \int_0^z \frac{x^{\alpha_1-1} e^{-x/\beta}}{\beta^{\alpha_1} \Gamma(\alpha_1)} \cdot \frac{(z-x)^{\alpha_2-1} e^{-(z-x)/\beta}}{\beta^{\alpha_2} \Gamma(\alpha_2)} dx = \frac{e^{-z/\beta}}{\beta^{\alpha_1+\alpha_2} \Gamma(\alpha_1) \Gamma(\alpha_2)} \int_0^z x^{\alpha_1-1} (z-x)^{\alpha_2-1} dx = \frac{e^{-z/\beta} z^{\alpha_1+\alpha_2-1}}{\beta^{\alpha_1+\alpha_2} \Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}$$

¡Por lo tanto, $(X+Y \sim \text{Gamma}(\alpha_1+\alpha_2, \beta))$!

Corolario importante:

Si $(X_1, \dots, X_n)$ son i.i.d. $(\text{Exp}(\lambda))$ ($\text{Gamma}(1, 1/\lambda)$), entonces $(\sum_{i=1}^n X_i \sim \text{Gamma}(n, 1/\lambda))$. La suma de exponenciales independientes sigue una distribución Gamma.

Ejercicio

El tiempo de vida de un componente electrónico es $(\text{Exp}(\lambda=0.5))$ (media 2 años). Un sistema usa 4 componentes idénticos e independientes, reemplazando cada uno al fallar (redundancia en espera, "standby"). Encuentre la

distribución del tiempo total de vida del sistema (T) , y calcule $P(T > 10)$.

Por el corolario, $T = \sum_{i=1}^4 X_i \sim \text{Gamma}(n=4, \beta=1/\lambda=2)$.

Para calcular $P(T > 10)$ usamos la relación Gamma-Poisson (válida cuando el parámetro de forma es un entero (n)): si $T \sim \text{Gamma}(n, \beta)$, entonces $P(T > t) = P(\text{Poisson}(\frac{t}{\beta}) \leq n-1)$.
Con $(t=10)$, $(\beta=2)$: $(t/\beta=5)$, y necesitamos $P(\text{Poisson}(5) \leq 3)$:
 $P(T > 10) = e^{-5} \left(1 + 5 + \frac{5^2}{2!} + \frac{5^3}{3!} \right) = e^{-5} (1 + 5 + 12.5 + 20.833) \approx 0.2650$. Es decir, hay aproximadamente 26.5% de probabilidad de que el sistema siga funcionando después de 10 años.

Cociente de Variables Aleatorias

Para el cociente $(Z = Y/X)$, la densidad está dada por: $f_{Y/X}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} |x| f_{X,Y}(x, xz) dx$ Si (X) y (Y) son independientes: $f_{Y/X}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} |x| f_X(x) f_Y(xz) dx$

Ejemplo clásico: Cociente de dos normales estándar

Generar muestra de Y/X

Derivación de la fórmula para el cociente

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= \int_{\{y/x \leq z\}} f_X(x) f_Y(y) dx dy = \int_{-\infty}^0 \int_{zx}^{\infty} f_X(x) f_Y(y) dy dx + \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{zx} f_X(x) f_Y(y) dy dx \\ &\text{Diferenciando bajo el signo integral: } f_{Y/X}(z) = \int_{-\infty}^0 (-x) f_X(x) f_Y(zx) dx + \int_0^{\infty} x f_X(x) f_Y(zx) dx = \int_{-\infty}^{\infty} |x| f_X(x) f_Y(zx) dx \end{aligned}$$

Ejemplo del PDF: Cociente de normales estándar

Sean $(X, Y \sim N(0,1))$ i.i.d. Entonces: $f_{Y/X}(z) = \frac{1}{\pi(1+z^2)}$ ¡Es la distribución **Cauchy(0,1)**! Tiene colas pesadas y varianza infinita.

¿Qué distribución tiene el cociente de dos exponenciales independientes?

Si $(X, Y \sim \text{Exp}(\lambda))$ independientes, entonces: $f_{Y/X}(z) = \frac{1}{(1+z)^2}, \quad z > 0$ ¡Es una distribución $(F_{2,2})$! El cociente de exponenciales sigue una distribución F con (2,2) grados de libertad.

Ejercicio

(Barrios y colaboradores, Cuaderno de Ejercicios CP2, sección 10, ej. 2) Sea $(X=(X_1,X_2))$ con f.d.p. conjunta $f(x_1,x_2)=\frac{1}{x_1^2x_2^2}\mathbb{1}_{(1,\infty)}(x_1)\mathbb{1}_{(1,\infty)}(x_2)$. Encuentre la f.d.p. de (X_1/X_2) .

Sea $(Z=X_1/X_2)$. Usando la fórmula del cociente con $(x_1=zx_2)$: $f_Z(z) = \int x_2 f(x_2, zx_2) dx_2 = \int_{x_2 > \max(1, 1/z)} x_2 \cdot \frac{1}{(zx_2)^2 x_2^2} dx_2 =$

$\frac{1}{z^2} \int_{\max(1, 1/z)}^{\infty} x_2^{-3} dx_2$, $\int$ (la restricción $x_2 > \max(1, 1/z)$ viene de necesitar $x_2 > 1$ y $zx_2 > 1$ simultáneamente). Usando $\int_a^{\infty} x_2^{-3} dx_2 = \frac{1}{2a^2}$: $f_Z(z) = \frac{1}{2z^2} \cdot \max(1, 1/z)^2$. $\int$ Separando casos: para $z \geq 1$ (donde $\max(1, 1/z) = 1$): $f_Z(z) = \frac{1}{2z^2}$. Para $0 < z < 1$ (donde $\max(1, 1/z) = 1/z$): $f_Z(z) = \frac{1}{2z^2} \cdot (1/z)^2 = \frac{1}{2}$. Se puede verificar que integra a 1: $\int_0^1 \frac{1}{2} dz + \int_1^{\infty} \frac{1}{2z^2} dz = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. ✓

Distribución F (Fisher-Snedecor)

La distribución F con m y n grados de libertad se define como: $W = \frac{X/m}{Y/n} \sim F_{m,n}$, donde $X \sim \chi^2_m$, $Y \sim \chi^2_n$ independientes. Su densidad es: $f_W(w) = \frac{\Gamma(\frac{m+n}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})} \left(\frac{w}{1+w}\right)^{\frac{m}{2}} \left(\frac{1}{1+w}\right)^{\frac{n}{2}} \frac{1}{w^2}$, $w > 0$

Explora la distribución F

Grados de libertad m (numerador): 5 Grados de libertad n (denominador): 10

Propiedades de la distribución F:

- Si $T \sim t_n$ (t-Student), entonces $T^2 \sim F_{1,n}$
- $W^{-1} \sim F_{n,m}$ (recíproca)
- $E[W] = \frac{n}{n-2}$ para $n > 2$
- $\text{Var}(W) = \frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)}$ para $n > 4$
- Percentiles: $F(p; m, n) = \frac{1}{F(1-p; n, m)}$

Relación con la t-Student

Si $T \sim t_n$, entonces $T^2 = \frac{Z^2}{\chi^2_n/n}$.
Como $Z^2 \sim \chi^2_1$, tenemos $T^2 \sim \frac{\chi^2_1}{\chi^2_n/n} = \frac{\chi^2_1/1}{\chi^2_n/n} \sim F_{1,n}$.
Por lo tanto, el cuadrado de una t-Student sigue una F con (1, n) grados de libertad!

Ejemplo de aplicación: En ANOVA, la estadística $F = \frac{\text{MSB}}{\text{MSW}}$ sigue una distribución $F_{k-1, N-k}$ bajo la hipótesis nula.
Para $(m=3, n=12)$, el valor crítico al 95% es aproximadamente 3.49.

¿Qué le pasa a la distribución F cuando m y n crecen?

Cuando $n \rightarrow \infty$, $F_{m,n}$ converge a χ^2_m/m (una chi-cuadrada escalada).
Cuando $m \rightarrow \infty$, el comportamiento es similar. En la práctica, para grados de libertad

grandes (>100), la distribución F se aproxima a una normal.

Ejercicio

Usando la propiedad de reciprocidad $(W^{-1} \sim F_{n,m})$ (mencionada arriba), derive la relación de percentiles $(F(p;m,n) = 1/F(1-p;n,m))$.

Por definición, $(F(p;m,n))$ es el valor tal que $(\mathbb{P}(W \leq F(p;m,n)) = p)$, donde $(W \sim F_{m,n})$. Esta desigualdad es equivalente a: $[\mathbb{P}(W \leq F(p;m,n)) = \mathbb{P}(\frac{1}{W} \geq \frac{1}{F(p;m,n)}) = p]$ es decir, $[\mathbb{P}(\frac{1}{W} < \frac{1}{F(p;m,n)}) = 1-p]$. Pero por la propiedad de reciprocidad, $(1/W \sim F_{n,m})$. Por definición de percentil aplicada a $(1/W)$, el valor (v) tal que $(\mathbb{P}(1/W \leq v) = 1-p)$ es exactamente $(v = F(1-p;n,m))$. Comparando ambas expresiones: $[F(1-p;n,m) = \frac{1}{F(p;m,n)} \Leftrightarrow F(p;m,n) = \frac{1}{F(1-p;n,m)}]$. Esta identidad es la razón práctica por la que las tablas de la distribución F solo publican percentiles altos (como 0.95 o 0.99): los percentiles bajos se obtienen invirtiendo y cambiando el orden de los grados de libertad.

Aplicaciones: Cociente de Chi-cuadradas

Sean $(X \sim \chi^2_m)$ e $(Y \sim \chi^2_n)$ independientes. Entonces: $[Z = \frac{X}{Y}$
 \text{ tiene densidad } f_Z(z) =
 \frac{\Gamma(\frac{m+n}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})} \frac{z^{\frac{m}{2}-1}}{(1+z)^{\frac{m+n}{2}}}, \quad z > 0] Esta
 es la base de la distribución (F) .

Simulador: Cociente de Chi-cuadradas vs F

m (numerador): 3 n (denominador): 6

Relación entre F y Beta:

Si $(W \sim F_{m,n})$, entonces: $[\frac{\frac{m}{n}W}{1+\frac{m}{n}W} \sim$
 \text{Beta}(\frac{m}{2}, \frac{n}{2})] Esta transformación es útil para calcular
 percentiles de la distribución F.

¿Para qué se usa la distribución F en estadística?

La distribución F es fundamental en:

- ANOVA (comparación de medias de múltiples grupos)
- Prueba de igualdad de varianzas (prueba F)
- Pruebas de significancia global en regresión lineal
- Comparación de modelos anidados

Ejercicio

(Barrios y colaboradores, Cuaderno de Ejercicios CP2, sección 11, ej. 2 — adaptado)
 Sean (X_1, X_2) variables aleatorias independientes con
 $(X_i \sim \text{Gamma}(\alpha_i, \lambda))$ (mismo parámetro de tasa (λ)).
 Encuentre la f.d.p. de $(W = \frac{X_1}{X_1 + X_2})$, y explique su relación con la

distribución F de esta página.

Sea $(S=X_1+X_2)$, de modo que $(X_1=WS)$, $(X_2=S(1-W))$. El jacobiano de $((x_1, x_2) \rightarrow (w, s))$ es $|J|=s$. La densidad conjunta (por independencia) es: $f(x_1, x_2) = \frac{\lambda^{\alpha_1} x_1^{\alpha_1-1} e^{-\lambda x_1}}{\Gamma(\alpha_1)} \cdot \frac{\lambda^{\alpha_2} x_2^{\alpha_2-1} e^{-\lambda x_2}}{\Gamma(\alpha_2)}$. Sustituyendo $(x_1=ws)$, $(x_2=s(1-w))$, y multiplicando por $|J|=s$: $f(w, s) = \frac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} w^{\alpha_1-1} (1-w)^{\alpha_2-1} s^{\alpha_1+\alpha_2-1} e^{-\lambda s}$, $0 < w < 1, s > 0$. ¡La densidad se factoriza en una parte que depende solo de (w) y otra solo de (s) ! Integrando sobre (s) (usando $\int_0^\infty s^{\alpha_1+\alpha_2-1} e^{-\lambda s} ds = \Gamma(\alpha_1+\alpha_2) / \lambda^{\alpha_1+\alpha_2}$): $f_W(w) = \frac{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} w^{\alpha_1-1} (1-w)^{\alpha_2-1}$, $0 < w < 1$, que es exactamente la densidad de una $(\text{Beta}(\alpha_1, \alpha_2))$. Esta es la versión más fundamental de la relación F-Beta de esta página: cuando $(\alpha_1=m/2)$, $(\alpha_2=n/2)$ (es decir, (X_1, X_2) son chi-cuadradas), $(W=X_1/(X_1+X_2))$ coincide exactamente con la transformación $(\frac{(m/n)W_F}{1+(m/n)W_F})$ de una $(F_{m,n})$, confirmando por qué esa combinación resulta Beta.