

Distribuciones Condicionales

- [Caso discreto: masa condicional y regla de Bayes](#)
- [Caso continuo: densidad condicional y ley del estadístico inconsciente](#)
- [Esperanza y varianza condicional: leyes de la probabilidad total](#)
- [Teorema de Probabilidad Total y regla de Bayes \(discreto/continuo\)](#)

Caso discreto: masa condicional y regla de Bayes

Intuición: Cuando observamos un valor específico de una variable, actualizamos nuestra creencia sobre la otra. Por ejemplo, si lanzamos dos dados pero sabemos que el segundo dado (Y) es un número par, la probabilidad de que X sea 3 cambia. La función de masa condicional $f(x|y)$ reescala la conjunta.

Simulador: dados cargados (ejemplo del apunte)

Distribución conjunta modificable: ajusta los pesos relativos de cada celda (X filas 1..6, Y columnas 1..6). Observa la tabla condicional $f(x|Y=2)$.

Peso extra para celda ($X=2, Y=2$) (más masa):

 2

Ejemplo aleatorio

Ver respuesta exploratoria

Al modificar el peso $(2,2)$, la fila $Y=2$ concentra más masa en $x=2$. Observa que la suma sobre x siempre es 1. La fórmula $f(x|y)=f(x,y)/f_Y(y)$ se verifica: la probabilidad condicional refleja la nueva escala.

Notación formal (discreta): Sean (X,Y) discretas con $f(x,y)$. Para $f_Y(y)>0$: $f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$, $\mathbb{P}(X=x|Y=y) = f(x|y)$. Regla de Bayes: $f(y|x) = \frac{f(x|y)f_Y(y)}{\sum_{y'} f(x|y')f_Y(y')}$.

Ejercicio

(Barrios y colaboradores, Cuaderno de Ejercicios CP2, sección 3, ej. 2) De un grupo de 9 estudiantes internacionales: 4 mexicanos, 2 españoles y 3 franceses, se eligen tres estudiantes para otorgarles una beca. Sea (X) el número de estudiantes mexicanos elegidos, (Y) el número de españoles elegidos, y (Z) el número de franceses elegidos. Si se sabe que exactamente un francés recibió beca, calcule el número esperado de españoles que recibirán beca.

Condicionar en $(Z=1)$ (exactamente un francés elegido) significa que los otros 2 lugares de la beca se reparten entre los 6 estudiantes no franceses (4 mexicanos + 2 españoles), elegidos sin reemplazo. Así, condicional a $(Z=1)$, (Y) sigue una distribución **Hipergeométrica** con $(N=6)$ (población no francesa), $(M=2)$ (españoles), $(n=2)$ (lugares restantes):

$$\mathbb{E}[Y \mid Z=1] = n \cdot \frac{M}{N} = 2 \cdot \frac{2}{6} = \frac{2}{3} \approx 0.667.$$

Este es un ejemplo directo de $(f_{Y|Z}(y|z) = f(y,z)/f_Z(z))$: condicionar en el conteo de una categoría dentro de un muestreo sin reemplazo multivariado reduce el problema a una hipergeométrica sobre las categorías restantes — la misma idea vista en el capítulo de la distribución multinomial.

Caso continuo: densidad condicional y ley del estadístico inconsciente

Intuición: En el mundo continuo, condicionar en un evento de probabilidad cero ($Y=y$) requiere límites. La densidad condicional $f(x|y)$ es un "corte" de la superficie conjunta, normalizado. Piensa en la recta de regresión: la esperanza condicional $E[X|Y=y]$ es la mejor predicción de X dado Y .

Simulador: densidad condicional exponencial (ejemplo del PDF)

Densidad conjunta: $f(x,y) = \frac{1}{y} e^{-x/y} e^{-y}$, para $(x>0, y>0)$. Dado $(Y=y)$, $(X|Y=y) \sim \text{Exp}(1/y)$.

Valor condicionante (y) : $y = 2.0$

[Simular observación \$X | Y=y\$](#)

Ver insight teórico

La densidad condicional es $f(x|y) = \frac{1}{y} e^{-x/y}$ (exponencial con media y). La esperanza condicional $E[X|Y=y]=y$. Ley de esperanza total: $E[X] = E[E[X|Y]] = E[Y] = 1$ (pues $Y \sim \text{Exp}(1)$). Arrastra y observa cómo la curva se aplana o encoge.

Notación continua: $f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$. $P(a \leq X \leq b | Y=y) = \int_a^b f(x|y)dx$, $E[X|Y=y] = \int x f(x|y)dx$.

Ejercicio

(Barrios y colaboradores, Cuaderno de Ejercicios CP2, sección 3, ej. 1b) Las concentraciones de monóxido de carbono (X) y de bióxido de carbono (Y) en las emisiones de un coche elegido al azar siguen una distribución conjunta

$f_{X,Y}(x,y) = 2e^{-x-y} \mathbb{1}_{\{0 \leq y < x < \infty\}}(x,y)$. Si se observa una concentración de $(Y=2)$, ¿cuál es la probabilidad de que la concentración de monóxido de carbono (X) sea mayor que 4?

Primero encontramos la marginal de (Y) , integrando sobre (x) desde (y) hasta (∞) (por el soporte $(x > y)$): $f_Y(y) = \int_y^\infty 2e^{-x-y} dx = 2e^{-y} \int_y^\infty e^{-x} dx = 2e^{-y} \cdot e^{-y} = 2e^{-2y}$, $\text{quad } y > 0$. La densidad condicional es entonces: $f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{2e^{-x-y}}{2e^{-2y}} = e^{-(x-y)}$, $\text{quad } x > y$, es decir, $(X-y) \mid Y=y \sim \text{Exponencial}(1)$ — la misma estructura de "exponencial desplazada" vista en el ejemplo de esta página. Entonces: $\mathbb{P}(X > 4 \mid Y=2) = \mathbb{P}(X-2 > 2 \mid Y=2) = e^{-2} \approx 0.1353$.

Esperanza y varianza condicional: leyes de la probabilidad total

Intuición: La esperanza condicional $E[Y|X]$ es una variable aleatoria que resume la tendencia de Y cuando conocemos X. La Ley de Esperanza Total dice que en promedio, la predicción condicional da la media global. La Ley de Varianza Total descompone la varianza en "explicada" por X y "residual".

Simulador: mezcla Poisson-Gamma (número de accidentes)

Supongamos $N|\Lambda = \lambda \sim \text{Poisson}(\lambda)$ y $\Lambda \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$. Marginalmente $N \sim$ Binomial Negativa. Ajusta los parámetros y observa la esperanza condicional.

α (forma): 2.0

β (escala): 2.0

Media teórica de N: -

Generar muestra ? y N | ?

Valor simulado: -

Verificación de leyes: $E[N] = E[E[N|\Lambda]] = E[\Lambda] = \alpha\beta$. Varianza total: $\text{Var}(N) = E[\text{Var}(N|\Lambda)] + \text{Var}(E[N|\Lambda]) = E[\Lambda] + \text{Var}(\Lambda) = \alpha\beta + \alpha\beta^2$.

Explicación interactiva

Usando la ley de esperanza total: $E[N] = E[\Lambda] = \alpha\beta$. La ley de varianza total separa la variabilidad entre individuos (diferente λ) y la variabilidad Poisson pura. Juega con α y β para ver cómo cambia la media condicional y marginal.

Teoremas clave: $E[Y] = E[E[Y|X]], \quad \text{Var}(Y) = E[\text{Var}(Y|X)] +$

$\text{Var}(\mathbb{E}[Y|X]).$

Ejercicio

(Barrios y colaboradores, Cuaderno de Ejercicios CP2, sección 4, ej. 3) Se tiran dos dados honestos y la suma de las caras se denota por (N) . Luego se tira (N) veces una moneda cargada al águila con $(p=0.55)$, y se denota por (Y) el número de águilas obtenidas. Determine $(\mathbb{E}[Y])$ y $(\text{Var}(Y))$.

Dado (N) , $(Y|N=n \sim \text{Bin}(n, 0.55))$, así que $(\mathbb{E}[Y|N] = 0.55N)$ y $(\text{Var}(Y|N) = 0.55(0.45)N)$. Para (N) , la suma de dos dados: $(\mathbb{E}[N] = 7)$, $(\text{Var}(N) = 2 \cdot \frac{35}{12} = \frac{35}{6} \approx 5.833)$ (varianza de un dado: $(\frac{35}{12})$, y los dos dados son independientes).

Por la ley de esperanza total: $(\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|N]] = \mathbb{E}[0.55N] = 0.55(7) = 3.85.)$ Por la ley de varianza total: $(\text{Var}(Y) = \mathbb{E}[\text{Var}(Y|N)] + \text{Var}(\mathbb{E}[Y|N]) = 0.55(0.45)\mathbb{E}[N] + 0.55^2\text{Var}(N) \quad | \quad = 0.2475(7) + 0.3025\left(\frac{35}{6}\right) \approx 1.7325 + 1.7646 = 3.4971.)$

Teorema de Probabilidad Total y regla de Bayes (discreto/continuo)

Intuición: El Teorema de Probabilidad Total nos permite obtener la distribución marginal a partir de las condicionales. La regla de Bayes invierte el condicionamiento: actualizamos nuestra creencia sobre un parámetro después de observar datos.

Ejemplo: calidad de piezas (discreto-continuo)

Una máquina produce piezas defectuosas con tasa θ (probabilidad de defecto) que varía entre lotes: $\theta \sim \text{Beta}(a,b)$. Luego, $D \mid \theta = \theta \sim \text{Bernoulli}(\theta)$. Modelo Beta-Binomial.

a (Beta): 2.0

b (Beta): 2.0

Piezas defectuosas observadas, k (de n=3 ensayos):

Actualizar distribución a posteriori de ? | datos

Posterior: $\text{Beta}(a+k, b+n-k)$

Ver respuesta conceptual

Teorema de Probabilidad Total: $P(\text{Datos}) = \int P(\text{Datos}|\theta) f_{\theta}(\theta) d\theta$.
Bayes: $f(\theta|\text{datos}) \propto f(\text{datos}|\theta) f_{\theta}(\theta)$. La distribución posterior es $\text{Beta}(a+k, b+n-k)$, combinando información previa y evidencia.

Fórmulas: Probabilidad total: $f_X(x) = \sum_y f(x|y)f_Y(y)$ (discreto) o integral (continuo). Regla de Bayes: $f(y|x) = \frac{f(x|y)f_Y(y)}{\int f(x|v)f_Y(v)dv}$.

Ejercicio

(Barrios y colaboradores, Cuaderno de Ejercicios CP2, sección 4, ej. 4) De acuerdo con estadísticas de una compañía aseguradora, el 60% de los conductores se clasifican como buenos conductores y el resto como malos. Para buenos conductores, el monto promedio de reclamación es de \$1,400 con varianza 40,000. Para los malos conductores, el monto medio de reclamación es de \$2,000 con varianza 250,000. Calcule la varianza del monto de un siniestro seleccionado aleatoriamente.

Sea (I) el tipo de conductor (bueno con probabilidad 0.6, malo con 0.4) y (X) el monto de reclamación. Primero, la media total por probabilidad total: $E[X] = 0.6(1400) + 0.4(2000) = 840 + 800 = 1640$. Usando la ley de varianza total, $Var(X) = E[Var(X|I)] + Var(E[X|I])$: $E[Var(X|I)] = 0.6(40,000) + 0.4(250,000) = 24,000 + 100,000 = 124,000$, $Var(E[X|I]) = 0.6(1400 - 1640)^2 + 0.4(2000 - 1640)^2 = 0.6(57,600) + 0.4(129,600) = 34,560 + 51,840 = 86,400$. Sumando: $Var(X) = 124,000 + 86,400 = 210,400$. La varianza total combina la variabilidad "dentro de cada grupo" (124,000) más la variabilidad "entre grupos" causada por no saber de antemano si el conductor es bueno o malo (86,400) — exactamente el mismo principio de descomposición usado en el simulador Poisson-Gamma de la página anterior.