

Teorema de Continuidad de la Probabilidad

El **teorema de continuidad** establece que la probabilidad es una función continua respecto a sucesiones monótonas de eventos:

$$\begin{aligned} & \text{Si } A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n) = \\ & \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \quad \text{Si } A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n) = \\ & \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) \end{aligned}$$

Es una consecuencia directa de los axiomas K2 y K3 (no un axioma adicional).

Visualización: Sucesión creciente de intervalos

Ejemplo: sucesión creciente

Para $A_n = [0, n]$, tenemos $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$ y $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = [0, \infty)$. $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - e^{-\lambda n}) = 1 = \mathbb{P}([0, \infty))$

Ejercicio

Sea $B_n = (0, 1/n)$ para $(n=1, 2, \dots)$, una sucesión decreciente de eventos $(B_1 \supseteq B_2 \supseteq \dots)$ para una variable aleatoria (X) uniforme en $((0, 1))$. Use el teorema de continuidad para encontrar $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(B_n)$.

Como $(X \sim \text{Unif}(0, 1))$, $\mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(0 < X < 1/n) = 1/n$. La intersección $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \emptyset$ (ningún punto $(x > 0)$ está en todos los B_n), pues eventualmente $(1/n < x)$. Por el teorema de continuidad, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$, consistente con $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/n = 0$.