

Distribución Gamma

Gamma(α , λ): $f(y) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} y^{\alpha-1} e^{-\lambda y}$, $y > 0$

$E[Y] = \frac{\alpha}{\lambda}$

$\text{Var}(Y) = \frac{\alpha}{\lambda^2}$

Casos especiales: $\alpha=1 \rightarrow$ Exponencial; $\alpha=n/2, \lambda=2 \rightarrow \chi^2_n$

Explorador de Gamma

α (forma): 2.0 λ (tasa): 1.0

Función Gamma: $\Gamma(x) = \int_0^\infty u^{x-1} e^{-u} du$

Propiedades: $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, $\Gamma(n+1) = n!$

Ejercicio

(Barrios y colaboradores, Cuaderno de Ejercicios CP1, sección 15, ej. 9) Si $(Y \sim \text{Gamma}(\alpha, \lambda))$, se puede demostrar que para $(a \in \mathbb{R})$ con $(\alpha + a > 0)$: $E[Y^a] = \frac{\lambda^a \Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha + a)}$. Use esta fórmula con $(a=1)$ para verificar que $E[Y] = \alpha/\lambda$, consistente con la fórmula ya conocida.

Sustituyendo $(a=1)$: $E[Y] = \frac{\lambda \Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha + 1)}$. Usando la propiedad $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha)$: $E[Y] = \frac{\lambda \Gamma(\alpha)}{\alpha \Gamma(\alpha)} = \lambda/\alpha$. Esto confirma la fórmula $E[Y] = \alpha/\lambda$ mostrada arriba, y la fórmula general permite además calcular momentos fraccionarios o negativos, como $E[1/\sqrt{Y}]$ o $E[Y^{-1}]$ (siempre que $(\alpha - 1 > 0)$).