

Función Generadora de Momentos

- [Función Generadora de Momentos \(FGM\)](#)
- [Propiedades de la FGM](#)
- [Suma de Variables Independientes](#)
- [Problema de los Momentos](#)
- [Función Característica \(FC\)](#)

Función Generadora de Momentos (FGM)

La **función generadora de momentos (FGM)** de una v.a. (X) es: $m_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}]$ Siempre que la esperanza exista para $|t| < \delta$ con $\delta > 0$.

Explorador de FGM

Distribución:

Generación de momentos

$$\mathbb{E}[X^r] = m_X^{(r)}(0) = \left. \frac{d^r}{dt^r} m_X(t) \right|_{t=0}$$

Demostración: Desarrollando $(e^{tX} = \sum_{k=0}^{\infty} (tX)^k/k!)$, tomando esperanza y derivando.

Ejemplos del PDF:

- Bernoulli(p): $m_X(t) = q + pe^t$
- Exponencial(λ): $m_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t} = (1 - t/\lambda)^{-1}$
- Poisson(λ): $m_X(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}$

¿Qué significa que $m_X(0) = 1$?

$m_X(0) = \mathbb{E}[e^{0 \cdot X}] = \mathbb{E}[1] = 1$. Es una propiedad fundamental que verifica que la FGM está bien definida.

Ejercicio

(Barrios y colaboradores, Cuaderno de Ejercicios CP1, sección 11, ej. 2) Sea $(Y \sim \text{Geo}(p))$, es decir $(f(y) = pq^{y-1} \mathbb{1}_{\{1,2,\dots\}}(y))$, $(q=1-p)$. Demuestre que $m_Y(t) = \frac{pe^t}{1-qe^t}$, y encuentre la media y

varianza de (Y) usando la FGM.

$m_Y(t) = \sum_{y=1}^{\infty} pq^{y-1}e^{ty} = pe^t \sum_{y=1}^{\infty} (qe^t)^{y-1} = \frac{pe^t}{1-qe^t}$, $\text{válido si } qe^t < 1$. Derivando (regla del cociente) y evaluando en $(t=0)$: $\mathbb{E}[Y] = m_Y'(0) = 1/p$. Derivando una segunda vez, $\mathbb{E}[Y^2] = m_Y''(0) = (2-p)/p^2$, y $\text{var}(Y) = \mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}[Y]^2 = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2} = \frac{q}{p^2}$.

Propiedades de la FGM

Propiedades clave:

- **Transformación lineal:** $m_{a+bX}(t) = e^{at} m_X(bt)$
- **Teorema de unicidad:** Si $m_X(t) = m_Y(t)$ en un entorno de 0, entonces X e Y tienen la misma distribución
- **Suma de independientes:** Si X e Y son independientes, $m_{X+Y}(t) = m_X(t) m_Y(t)$

Verificación: Transformación lineal

Distribución base:

a (desplazamiento):

b (escala):

Verificar

Demostración de transformación lineal

$$m_{a+bX}(t) = E[e^{t(a+bX)}] = E[e^{ta} e^{tbX}] = e^{ta} E[e^{tbX}] = e^{ta} m_X(bt)$$

¿Por qué el teorema de unicidad es importante?

Permite identificar distribuciones. Si calculamos la FGM de una suma y resulta ser la FGM de una distribución conocida, podemos concluir que la suma sigue esa distribución. Es la base para la demostración del Teorema Central del Límite.

Ejercicio

(Barrios y colaboradores, Cuaderno de Ejercicios CP1, sección 11, ej. 4b) Sea X v.a. con función generadora de momentos $m_X(t)$. Demuestre que $m_X(t) \geq 0$ para toda $t \in \mathbb{R}$.

Para cualquier $t \in \mathbb{R}$ y cualquier valor de X , la función exponencial satisface $e^{tX} > 0$. Como el valor esperado de una variable aleatoria estrictamente positiva es no negativo (de hecho positivo, cuando existe), se sigue que $m_X(t) = E[e^{tX}] \geq 0$ para toda t donde la FGM esté definida.

Suma de Variables Independientes

Si (X) e (Y) son independientes: $[m_{X+Y}(t) = m_X(t) \cdot m_Y(t)]$ Esto permite encontrar la distribución de sumas de variables independientes.

Calculadora de suma de independientes

Distribución de X:

Distribución de Y:

Calcular distribución de X+Y

Ejemplos clásicos (por unicidad):

- $(X_i \sim \text{Poisson}(\lambda_i))$ independientes $\Rightarrow (\sum X_i \sim \text{Poisson}(\sum \lambda_i))$
- $(X_i \sim \text{Binomial}(n_i, p))$ independientes $\Rightarrow (\sum X_i \sim \text{Binomial}(\sum n_i, p))$
- $(X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2))$ independientes $\Rightarrow (\sum X_i \sim N(\sum \mu_i, \sum \sigma_i^2))$

¿La suma de Bernoulli independientes qué distribución sigue?

Si $(X_i \sim \text{Bernoulli}(p))$ independientes, entonces $(S_n = \sum_{i=1}^n X_i \sim \text{Binomial}(n,p))$. La FGM de Bernoulli es $(q+pe^t)$, elevada a la n da $((q+pe^t)^n)$, que es la FGM de $\text{Binomial}(n,p)$.

Ejercicio

(Barrios y colaboradores, Cuaderno de Ejercicios CP1, sección 11, ej. 5) Una variable aleatoria (X) tiene función generadora de momentos $(m_X(t)=(0.2e^t+0.8)^8)$. Determine: (a) la distribución de (X) , (b) $(\mathbb{P}[X>0])$ y $(\mathbb{P}[1\leq X\leq 4])$, (c) esperanza y varianza.

(a) La forma $((q+pe^t)^n)$ con $(p=0.2)$, $(q=0.8)$, $(n=8)$ es la FGM de $(X\sim\text{Binomial}(8, 0.2))$; por el teorema de unicidad, (X) tiene exactamente esa distribución.

(b) $\mathbb{P}[X > 0] = 1 - \mathbb{P}[X = 0] = 1 - (0.8)^8 \approx 0.8322$.

$\mathbb{P}[1 \leq X \leq 4] = \sum_{k=1}^4 \binom{8}{k} (0.2)^k (0.8)^{8-k} \approx 0.8218$.

(c) $\mathbb{E}[X] = np = 1.6$, $\text{var}(X) = np(1-p) = 1.28$.

Problema de los Momentos

¿Los momentos determinan la distribución? **NO**. Existen distribuciones distintas con los mismos momentos.
La **FGM** (cuando existe) sí determina la distribución de manera única.

Contraejemplo: Lognormal vs Distribución "perturbada"

Mostrar momentos de Lognormal

Contraejemplo del PDF

Lognormal: $f_X(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\log x)^2}{2}} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$
Distribución "perturbada": $f_Y(y) = f_X(y)[1 + \sin(2\pi \log y)] \mathbb{1}_{(0,\infty)}(y)$
¡Tienen exactamente los mismos momentos para todo $r = 1, 2, 3, \dots$!

Momentos de la Lognormal($\mu=0, \sigma=1$):

$\mathbb{E}[X^r] = e^{r^2/2}$
Por ejemplo: $\mathbb{E}[X] = e^{1/2} \approx 1.6487$, $\mathbb{E}[X^2] = e^2 \approx 7.3891$

¿La FGM de la Lognormal existe?

¡No! Aunque tiene todos los momentos finitos, la integral $\int_0^\infty e^{tx} f_X(x) dx$ diverge para cualquier $t > 0$. Es un ejemplo de distribución que tiene momentos pero no FGM.

Ejercicio

Usando la fórmula $\mathbb{E}[X^r] = e^{r^2/2}$ de la Lognormal(0,1), calcule $\mathbb{E}[X^3]$ y $\mathbb{E}[X^4]$.

$\mathbb{E}[X^3] = e^{9/2} \approx 90.017$, $\mathbb{E}[X^4] = e^8 \approx 2980.96$. Estos crecen muy rápido con (r) — precisamente esta tasa de crecimiento es la razón por la que la serie que definiría la FGM $(\sum_r \mathbb{E}[X^r] t^r / r!)$ diverge para todo $(t > 0)$: los momentos crecen como $(e^{r^2/2})$, mucho más rápido que $(r!)$ puede

compensar.

Función Característica (FC)

La **función característica** de una v.a. X es: $\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = \mathbb{E}[\cos(tX)] + i\mathbb{E}[\sin(tX)]$ **Siempre existe** para todo $t \in \mathbb{R}$.

Comparativa: FGM vs FC

Distribución:

Relación FGM $\leftrightarrow$ FC: Si la FGM existe, entonces $\varphi_X(t) = m_X(it)$.
Propiedad de simetría: Si la distribución es simétrica alrededor de 0, $\varphi_X(t)$ es real.
Ejemplos: $\text{Normal}(0,1) \rightarrow \varphi(t) = e^{-t^2/2}$; $\text{Cauchy}(0,1) \rightarrow \varphi(t) = e^{-|t|}$.

¿Por qué la función característica siempre existe?
Porque $|e^{itX}| = |\cos(tX) + i\sin(tX)| = 1$ para todo (t, X) . Por lo tanto, $|\varphi_X(t)| \leq \mathbb{E}[|e^{itX}|] = 1$, y la integral o suma converge absolutamente.

Ejercicio

Usando la relación $\varphi_X(t) = m_X(it)$ y la FGM de Poisson(λ), $m_N(t) = e^{\lambda(e^t-1)}$, encuentre la función característica de Poisson(λ).
Sustituyendo t por it en la FGM: $\varphi_N(t) = m_N(it) = e^{\lambda(e^{it}-1)}$. A diferencia de la FGM, esta expresión está bien definida para todo $t \in \mathbb{R}$ real, ya que e^{it} siempre tiene módulo 1 (no hay problema de divergencia como en la Lognormal).