

Distribuciones Discretas Paramétricas

- [Distribuciones Bernoulli y Binomial](#)
- [Distribución Geométrica y Pérdida de Memoria](#)
- [Distribución Binomial Negativa](#)
- [Distribución Poisson](#)
- [Distribución Hipergeométrica](#)

Distribuciones Bernoulli y Binomial

Bernoulli(p): $(X \in \{0,1\})$, $(f(x)=p^x(1-p)^{1-x})$, $(\mathbb{E}[X]=p)$, $(\operatorname{var}(X)=p(1-p))$

Binomial(n,p): $(X = \sum_{i=1}^n Y_i)$, $(f(x)=\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x})$, $(\mathbb{E}[X]=np)$, $(\operatorname{var}(X)=np(1-p))$

Simulador Binomial

n:

20

p:

0.30

Simular 5000 muestras

Ejemplo del PDF (cajas dañadas): $n=20, p=0.03$
 $(\mathbb{E}[X]=0.6)$, $(\operatorname{var}(X)=0.582)$, $(\mathbb{P}(X>1)=0.1199)$

Ejercicio

(Barrios y colaboradores, Cuaderno de Ejercicios CP1, sección 14, ej. 2) Demuestre que si $(X \sim \text{Bin}(n,p))$, entonces se tiene la fórmula recurrente:

$[\mathbb{P}(X=x+1) = \frac{(n-x)p}{(x+1)(1-p)} \mathbb{P}(X=x).]$ Partiendo de la f.m.p.: $(\frac{\mathbb{P}(X=x+1)}{\mathbb{P}(X=x)} = \frac{\binom{n}{x+1}p^{x+1}(1-p)^{n-x-1}}{\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}})$. Usando $(\frac{\binom{n}{x+1}}{\binom{n}{x}} = \frac{(n-x)}{(x+1)})$, el cociente se simplifica a $(\frac{(n-x)}{(x+1)} \cdot \frac{p}{1-p})$, que es exactamente la fórmula buscada. Esta recurrencia es útil para calcular tablas de la binomial sin recomputar factoriales completos en cada paso.

Distribución Geométrica y Pérdida de Memoria

Geométrica(p): número de fracasos hasta el primer éxito. $f_X(x) = p(1-p)^x, \quad x=0,1,2,\ldots$
 $E[X] = \frac{1-p}{p}, \quad \operatorname{var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$

Pérdida de memoria: $P(X \geq m+n \mid X \geq m) = P(X \geq n)$

Verificación de pérdida de memoria

p:

0.3

0.30

m:

3

3

n:

2

2

2

Verificar

Demostración de pérdida de memoria

$$P(X \geq n) = \sum_{k=n}^{\infty} p q^k = \frac{p q^n}{1-q} = q^n$$
$$P(X \geq m+n \mid X \geq m) = \frac{q^{m+n}}{q^m} = q^n = P(X \geq n)$$

¿Qué distribución continua tiene pérdida de memoria?

La distribución **Exponencial** es el análogo continuo de la Geométrica. Ambas son las únicas distribuciones (discreta y continua) que satisfacen la propiedad de pérdida de memoria.

Ejercicio

Sea $(X \sim \text{Geométrica}(p=0.2))$ (fracasos hasta el primer éxito, $(q=0.8)$).
Calcule $P(X \geq 10 \mid X \geq 5)$ y verifique numéricamente que coincide con $P(X \geq 5)$.

Usando $P(X \geq k) = q^k$: $P(X \geq 5) = 0.8^5 \approx 0.3277$ y $P(X \geq 10) = 0.8^{10} \approx 0.1074$. Entonces $P(X \geq 10 \mid X \geq 5) = \frac{P(X \geq 10)}{P(X \geq 5)} = \frac{0.8^{10}}{0.8^5} = 0.8^5 \approx 0.3277 = P(X \geq 5)$. Confirma la pérdida de memoria: haber fallado ya 5 veces no cambia la probabilidad de necesitar 5 fracasos más.

Distribución Binomial Negativa

Binomial Negativa(r,p): número de fracasos hasta el r-ésimo éxito. $f_X(x) = \binom{r+x-1}{x} p^r (1-p)^x, \quad x=0,1,2,\dots$ $E[X] = r \frac{1-p}{p}$, $\operatorname{var}(X) = r \frac{1-p}{p^2}$

Caso particular: $(r=1) \rightarrow$ Geométrica.

Simulador Binomial Negativa

r (éxitos requeridos):

3

p:

0.40

Simular 5000 muestras

Ejemplo: Para $r=3, p=0.4$, $E[X]=3 \cdot 0.6 / 0.4=4.5$, $\operatorname{var}(X)=3 \cdot 0.6 / 0.16=11.25$

Ejercicio

Un vendedor tiene probabilidad 0.3 de cerrar una venta en cada visita, de forma independiente entre visitas. Si (X) es el número de visitas fallidas antes de lograr su tercera venta, encuentre $E[X]$ y $\operatorname{var}(X)$.

Aquí $(X \sim \text{Binomial Negativa}(r=3, p=0.3))$. Usando las fórmulas: $E[X] = r \frac{1-p}{p} = 3 \cdot \frac{0.7}{0.3} = 7, \quad \operatorname{var}(X) = r \frac{1-p}{p^2} = 3 \cdot \frac{0.7}{0.09} \approx 23.33$. En promedio, el vendedor necesitará 7 visitas fallidas (10 visitas en total) antes de lograr su tercera venta.

Distribución Poisson

Poisson(λ): modela el número de eventos raros en un intervalo. $f_X(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, \quad x=0,1,2,\ldots$ $E[X] = \lambda$, $\text{var}(X) = \lambda$

Aproximación binomial: Si n grande y p pequeño, $\text{Bin}(n,p) \approx \text{Po}(np)$

Simulador Poisson y aproximación Binomial

λ :

4.0

Comparar con Binomial:

Simular 5000 muestras

Aproximación Poisson a Binomial

$\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \approx \frac{(np)^x e^{-np}}{x!}, \quad n \rightarrow \infty, p \rightarrow 0, np = \lambda$ En la simulación se compara la distribución empírica con la teórica Poisson.

Ejemplo del PDF (conglomeración de gente): $\lambda=4$ personas/ $2m^2$
 $P(X=0)=e^{-4}=0.0183$
En $4m^2$, $\lambda=8$, $P(Y \geq 3)=1-\sum_{k=0}^2 e^{-8} 8^k/k! = 0.986$

¿Por qué la media y varianza son iguales en Poisson?

Es una propiedad característica de la distribución Poisson. En la práctica, si la media muestral y la varianza muestral son muy diferentes, es probable que los datos no sigan una distribución Poisson.

Ejercicio

(Barrios y colaboradores, Cuaderno de Ejercicios CP1, sección 14, ej. 6) Sea $Y \sim \text{Poisson}(\lambda)$. Si se sabe que $P(Y=0)=P(Y=1)$, encuentre λ y calcule $P(Y=2)$.

Igualando las probabilidades: $e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda} \implies \lambda = 1$.

\] Entonces $\mathbb{P}(Y=2) = \frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!} = \frac{1^2 e^{-1}}{2} = \frac{e^{-1}}{2} \approx 0.18394.$ \]

Distribución Hipergeométrica

Hipergeométrica(N, M, n): muestreo sin reemplazo. $f_X(x) = \frac{\binom{M}{x} \binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$, $\quad x=0,1,\dots,n$ $\mathbb{E}[X] = n \frac{M}{N}$, $\operatorname{var}(X) = n \frac{M}{N} \frac{N-M}{N} \frac{N-n}{N-1}$

Simulador Hipergeométrico

N (población): 50 **M (éxitos en población):** 10 **n (muestra):** 5

Relación con Binomial: Cuando N es grande, la Hipergeométrica se aproxima a Binomial(n, p) con $p = M/N$. El factor de corrección $\frac{N-n}{N-1}$ se llama **factor de corrección por población finita**.

¿Cuándo usar Hipergeométrica en lugar de Binomial?

Cuando el muestreo es **sin reemplazo** y la población es finita. Si la muestra es pequeña comparada con la población ($n \ll N$), la aproximación binomial es adecuada.

Ejercicio

(Barrios y colaboradores, Cuaderno de Ejercicios CP1, sección 14, ej. 9) Un comprador de un lote de N=100 artículos, de los cuales M=10 son defectuosos, extrae una muestra de n=5 artículos sin reemplazo. Comprará el lote si encuentra menos de 2 artículos defectuosos en la muestra. Calcule la probabilidad de que compre el lote.

Sea $X \sim \text{Hipergeométrica}(N=100, M=10, n=5)$. Se busca $\mathbb{P}(X < 2) = \mathbb{P}(X=0) + \mathbb{P}(X=1)$: $\mathbb{P}(X=0) = \frac{\binom{10}{0} \binom{90}{5}}{\binom{100}{5}} \approx 0.58375$, $\mathbb{P}(X=1) = \frac{\binom{10}{1} \binom{90}{4}}{\binom{100}{5}} \approx 0.33939$. Por lo tanto $\mathbb{P}(\text{compra}) \approx 0.58375 + 0.33939 = 0.92314$, es decir, aproximadamente 92.3% de probabilidad de que el comprador acepte el lote.